

# Sistema d'indicadors mensuals per al seguiment de la conjuntura de les Illes Balears emprant mètodes d'ancorament i reconciliació

Tomás del Barrio i Andreu Sansó

22 de gener de 2021

## Abstract

Nota metodològica on es proposa la implementació d'un nou sistema d'indicadors sintètics mensuals per al seguiment de la conjuntura de les Illes Balears. Aquest sistema d'indicadors inclou desagregacions tant sectorials (agricultura; indústria i energia; construcció; serveis) com territorials (conjunt de les illes Balears; Mallorca; Menorca i Eivissa-Formentera); està ancorat al VAB de les Illes Balears; i les estimacions del nivell d'activitat desagregades sectorial i territorialment estan reconciliades de manera que la seva agregació (gairebé) coincideix amb la que resulta de l'indicador agregat i ancorat al VAB. Així mateix, conté una proposta d'indicador sintètic del PIB turístic que també està ancorat a la magnitud de referència.

## Contents

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Sistema d'indicadors parcials</b>	<b>4</b>
2.1	Mètodes d'elaboració d'indicadors sintètics . . . . .	5
2.2	Selecció dels indicadors parcials . . . . .	7
2.3	Mètodes de Ponderació o Construcció d'Indicadors Sintètics (PLS i Sparse PLS) . . . . .	9
2.4	Tractament previ dels indicadors . . . . .	10
2.5	Indicadors sintètics estimats . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Ancorament i reconciliació del sistema d'indicadors de les Illes Balears</b>	<b>16</b>
3.1	Aplicació al sistema d'indicadors trimestrals actual . . . . .	17
3.1.1	Sensibilitat dels resultats i calibratge . . . . .	22
3.2	Aplicació al nou sistema d'indicadors mensuals . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Conclusions i línies futures de treball</b>	<b>25</b>

<b>5</b>	<b>Apèndix 1</b>	<b>29</b>
5.1	El mètode de Chow Lin . . . . .	29
5.2	El mètode de benchmark basat en regressió de Cholette-Dagum . . . . .	30
5.2.1	Model additiu . . . . .	30
5.2.2	Model multiplicatiu . . . . .	34
5.3	El model de regressió dinàmic generalitzat de Dagum, Cholette i Chen . . . . .	35
5.4	Reconciliació . . . . .	37
5.4.1	Mètode de reconciliació basat en regressió generalitzada . . . . .	38
5.4.2	Reconciliació per una via . . . . .	40
5.4.3	Reconciliació de marginals a sistemes classificats per dues vies . . . . .	43
5.4.4	Reconciliació de sistemes classificats per dues vies . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Apèndix 2: Mètodes d'ancorament-reconciliació d'indicadors</b>	<b>46</b>
6.1	Reconciliació de les sèries de VAB sectorial amb ancorament . . . . .	46
6.2	Reconciliació de les sèries d'Índex de Volum . . . . .	47
6.2.1	Desgregació temporal dels pesos i reconciliació d'aquests . . . . .	48
6.3	Reconciliació d'indicadors territorials i ancorament . . . . .	49
6.4	Reconciliació d'indicadors sectorials i ancorament . . . . .	50
6.5	Reconciliació d'indicadors territorials, sectorials i ancorament . . . . .	51
6.6	Reconciliació d'indicadors territorials, sectorials, VAB turístic i ancorament . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Apèndix 3: Rutines implementades en R</b>	<b>52</b>
7.1	Llistat de funcions . . . . .	54
<b>8</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>55</b>

## 1 Introducció

El seguiment de l'activitat econòmica a curt i mig termini és de vital importància, ja que ens permet saber en quina situació es troba l'economia d'un territori en termes generals i també sectorialment. És a dir, ens permet tenir informació sobre si l'activitat econòmica general, la d'un sector o regió del territori en particular es troben en una fase de creixement / decreixement, acceleració / desacceleració, en un punt d'inflexió etc ... A més de poder realitzar un seguiment de l'activitat econòmica també resulta interessant disposar de pronòstics sobre l'evolució futura de la mateixa. Un instrument que permet cobrir els anteriors objectius és un sistema d'indicadors sintètics general, sectorial i territorial de l'economia objecte d'estudi.

L'Agència d'Estratègia Turística de les Illes Balears (AETIB) ha mostrat interès en disposar d'eines quantitatives per al seguiment de la conjuntura econòmica i turística de les Illes Balears. En aquest sentit, l'AETIB, en col·laboració

amb la Direcció General de Model Econòmic i Ocupació (DGMEO) es va plantejar actualitzar, millorar i ampliar el model de sistema d'indicadors sintètics que la DGMEO venia emprant des de l'any 2010 (vegeu Del Barrio i Mateu, 2010). Entre les principals mancances que el sistema d'indicadors per al seguiment de la conjuntura presentava hi havia: 1) la manca d'ancorament a la comptabilitat regional anual; 2) manca d'estimacions per al PIB turístic; 3) poca desagregació sectorial; i 4) no disponibilitat de càlcul dels intervals de confinança.

En virtut de l'acord marc de col·laboració entre la Universitat de les Illes Balears (UIB) i l'AETIB, per al desenvolupament de projectes de promoció, estratègia i coneixement turístic, se'ns encarregà l'elaboració d'aquest nou sistema d'indicadors que intentés solucionar les anteriors mancances.<sup>1</sup> Fruit d'aquesta col·laboració és aquesta nota metodològica així com un conjunt de documentació adjunta, en la s'implementa un nou sistema d'indicadors sintètics per al seguiment de la conjuntura de les Illes Balears de periodicitat mensual. Aquest sistema d'indicadors inclou quatre desagregacions sectorials (agricultura; indústria i energia; construcció; serveis; PIB turístic) i tres territorials (Mallorca; Menorca i Eivissa-Formentera) i està ancorat al VAB de les Illes Balears.<sup>2</sup> A més, s'han dissenyat mètodes específics, tot i que basats en la metodologia desenvolupada per Dagum i Cholette (2006), per a la reconciliació de les estimacions sectorials/territorials amb les estimacions agregades (sectorial/territorialment).

El disseny del sistema d'indicadors per al seguiment de la conjuntura a les Illes Balears es basa en dues etapes ben diferenciades. En primera primera, es considera la construcció d'un sistema d'indicadors parcials. El punt de partida es Del Barrio i Mateu (2010) i es proposa un seguit de millores que es mostren en la secció 2, on també es presenten els resultats preliminars dels indicadors sense ancorar a una magnitud de referència ni reconciliar sectorial o territorialment.

En una segona etapa, aquests indicadors parcials es reconcilien entre ells i amb les macromagnituds oficials disponibles mitjançant tècniques d'ancorament i reconciliació. A l'apèndix 1 es mostren diferents mètodes de desagregació temporal (Chow-Lin, 1971), ancorament (Dagum i Cholette, 2006), reconciliació (Dagum i Cholette, 2006), mentre que a l'apèndix 2, a partir de i dels resultats mostrats a l'apèndix anterior es generalitzen els resultats de Dagum i Cholette (2006) als casos de reconciliació i ancorament simultani i a la conciliació simultània amb ancorament de les magnituds sectorials i territorials. La secció 3 mostra l'aplicació dels mètodes d'ancorament i reconciliació adaptats sistema d'indicadors parcials obtinguts a l'etapa 2. Per a la implementació pràctica del sistema d'indicadors per al seguiment de la conjuntura de les Illes Balears s'han programat un conjunt funcions en el llenguatge de programació orientat al tractament de dades R, les quals es mostren a l'apèndix 3. Els documents adjunt

---

<sup>1</sup> Conveni específic de col·laboració entre l'Agència d'Estratègia Turística de les Illes Balears, la Fundació Universitat-Empresa de les Illes Balears i la Universitat de les Illes Balears (Ref. 3949)

<sup>2</sup> Al llarg d'aquesta nota mantindrem l'ús del terme tècnic *benchmark* emprat en la literatura sobre el tema com a equivalent a "ancorament" a una magnitud anual de referència i "reconciliació", quan es disposi de desagregacions, ja siguin territorials ja siguin sectorials, i es pretèn que siguin compatibles amb la del corresponent agregat.

`BenchMark_rutines_v4.R` i `Benchmark_proves_v4.R` contenen el codi R.

La resta del document s'estructura de la següent manera: la secció 4 conté les conclusions preliminars i les futures línies de treball; a continuació, hi ha l'apèndix dedicat diferents mètodes de desagregació temporal (Chow-Lin, 1971), ancorament (Dagum i Cholette, 2006), reconciliació (Dagum i Cholette, 2006). El segon apèndix conté les adaptacions dels mètodes de Dagum i Cholette (2006) a l'estructura del sistema d'indicadors per al seguiment de la conjuntura ed les Illes Balears on s'imposa ancorament i reconciliació simultània.

## 2 Sistema d'indicadors parcials

El seguiment de l'activitat econòmica a curt i mig termini es veu molt facilitat per l'ajuda d'un sistema d'indicadors sintètics general, sectorial i territorial de l'economia objecte d'estudi. En el nostre cas de l'economia balear en general, per als sectors agrícola, de la indústria, la construcció i els serveis i per als territoris insulars de Mallorca, Menorca i Pitiüses. El present document se centrarà en el sistema d'indicadors sintètics d'activitat econòmica que s'elabora per al seguiment a curt / mitjà termini de l'activitat econòmica a nivell general, sectorial i per illes de les Illes Balears.

Aquest projecte, que es pot considerar una continuació i aplicació de la tasca iniciada a Del Barrio i Mateu (2010), consisteix en l'elaboració i posada en marxa d'un sistema d'indicadors sintètics d'activitat per a l'economia balear que estarà format pels següents índexs de periodicitat mensual:

- Índex d'activitat econòmica Total de les Illes Balears.

Per sectors:

- Índex d'activitat econòmica Agrícola.
- Índex d'activitat econòmica per al sector de la Construcció.
- Índex d'activitat econòmica per al sector Serveis.
- Índex d'activitat econòmica per al sector industrial.

Per illes:

- Índex d'activitat econòmica no agrària per al total de Mallorca.
- Índex d'activitat econòmica no agrària per al total de Menorca.
- Índex d'activitat econòmica no agrària per al total de Pitiüses.

## 2.1 Mètodes d'elaboració d'indicadors sintètics

La idea en què es basen els índexs sintètics d'activitat, és que hi ha un conjunt d'indicadors econòmics (normalment sèries temporals mensuals) que tenen una evolució temporal altament correlacionada amb la de l'activitat econòmica general o sectorial. Per tant, per a cada macromagnitud econòmica d'interès, de la qual normalment només es disposa d'informació anual o en el millor dels casos trimestral (amb bastant retard temporal), hi ha un conjunt d'indicadors econòmics representatius de la seva evolució amb periodicitat mensual i de ràpida disponibilitat. Per tant, aquests indicadors econòmics evolucionen de manera sincronitzada amb la macromagnitud i la informació sobre la seva evolució està disponible de forma ràpida i amb bastant anterioritat a la de la macromagnitud. Tot l'anterior, ens permetrà anticipar l'evolució de l'activitat econòmica o de la macromagnitud d'interès abans de estiguin disponibles les primeres dades oficials sobre el tema. O tenir una idea precisa de quin és el nivell d'activitat econòmica en el moment present, el que es vingut a anomenar "Nowcasting" o seguiment de l'activitat econòmica a curt termini o anàlisi de Conjuntura.

En concret, el que es fa amb un índex sintètic és triar un conjunt d'indicadors econòmics bàsics (representatius d'una macromagnitud), extreure la seva informació rellevant i afegir convenientment per elaborar una mesura (índex) que resumeixi les característiques comunes a tots ells. De cara a la construcció dels índexs sintètics s'han de cobrir les següents etapes:

1. Selecció dels indicadors parcials.
2. Tractament estadístic previ.
3. Extracció de la senyals de referència dels indicadors (component ciclotendència)
4. Agregació dels indicadors parcials.
5. Benchmarking, ancoratge i conciliació dels indicadors sintètics amb les macromagnituds de referència i entre els indicadors sectorials.

Per tant, en primer lloc resulta, cal disposar d'informació històrica de l'evolució de la macromagnitud d'interès i de la bateria d'indicadors econòmics representatius. A partir de l'anterior informació es pot fer una primera selecció dels indicadors que s'utilitzaran per al càlcul de l'índex sintètic. Aquesta selecció es realitzarà a partir dels criteris enunciats per Zarnowitz (1992) de qualitat estadística, disponibilitat, elevada correlació amb la macromagnitud de referència, del seu sentit econòmic (comportament cíclic coherent amb l'activitat econòmica i constància en relació amb la macromagnitud corresponent) , freqüència de les dades, longitud de les sèries i suavitat de les dades.

Un cop seleccionats els indicadors parcials és important trobar un mètode adequat d'agregació o ponderació dels mateixos. Hi ha diversos mètodes en la literatura com ara:

- Mètodes de ponderació simples que es basen per a les obtenció de ponderacions en mesures de correlacions, o mesures directament i inversament proporcionals a la variabilitat, etc ....., Veure per exemple Niemira i Klein (1994), Fernández (1991) i Green i Beckman (1992).
- Mètodes basats en anàlisi multivariant, bàsicament en procediments de components principals i anàlisi factorial estàtic i dinàmic, veure entre d'altres Stock i Watson (1990) i Forni, Hallin, Lippi i Reichlin (2001)
- Mètodes basats en models de components no observables.

En la fase de tractament estadístic previ, s'utilitzaran tècniques de models de sèries temporals univariants aplicades als indicadors parcials, de cara a fer un tractament de dades atípiques o outliers, d'efectes calendari i laboralitat. També cal estimar models univariants adequats a cada sèrie temporal de cara a cobrir el cost informatiu dels procediments d'extracció de senyals utilitzats per obtenir el component cicle-tendència o les sèries ajustades d'estacionalitat, veure per exemple Gomez i Maravall (1996). TRAM-SEATS, part TRAM i JDemetra ....

Finalment, donat el component estacional de la macromagnitud de referència és no observable (ja que se sol disposar de l'evolució de macromagnitud amb periodicitat anual) l'índex sintètic es tendeix a calcular a partir de les ponderacions calculades utilitzant informació anual i aplicades sobre els components ciclotendència o dades ajustades d'estacionalitat corresponents als indicadors parcials, d'entre els mètodes d'extracció de senyals i / o ajust estacional els més àmpliament difosos són els procediments X-12ARIMA (veure Findley et al. 1996), en procediment basat en models ARIMA (veure Gomez i Maravall (1996) Caporello i Maravall (2004)) en models estructurals de sèries temporals (unobservable Components models) programa STAMP Harvey ....

Per a l'elaboració dels índexs sintètics hem utilitzar el procediment jDementra +, atès que el procediment proposat per Eurostat i que unifica el TRAM-SEATS i X12ARIMA. Però tal i com es veurà més endavant els indicadors disponibles per a l'economia balear per regla general solen ser sèries temporals amb molt de soroll, i els senyals estimats per jDementra+ van acompanyats de soroll. Pota les versió anterior de sistema d'indicadors de l'economia balear es van utilitzar les Taxes d'Variació suavitzades proposades per Mellis (1991) i utilitzades inicialment per a l'elaboració de la Comptabilitat Nacional Trimestral d'INE. Per a la present versió de l'sistema d'indicadors sintètics s'ha decidit seguir la proposta de Gomez i Bengoechea (1998) que consisteix a aplicar el Hodrick-Prescott amb la contrast  $\lambda = 68.738376$  que és una versió simètrica d'el d'un filtre de Butterworth de el si de potència meitat en  $2\pi/20$ , de manera que una funció de guany que és el quadrat de les funció de guany associada a les TAS amb la seva versió AR (2,20), però té l'avantatge de tenir un desfasament zero a l'ésser un filtre simètric.

## 2.2 Selecció dels indicadors parcials

Per a la selecció dels indicadors parcials tal com s'ha comentat anteriorment s'ha tendit en compte els criteris de disponibilitat, elevada correlació amb la macromagnitud de referència, del seu sentit econòmic, freqüència de les dades i longitud de les sèries. En concret els indicadors que s'utilitzen per a la construcció de l'indicadors sintètics corresponents a agricultura, indústria, construcció, serveis, i l'activitat total es troben recollits en les taules 1 a la 5 respectivament, on es mostra el nom de la variable, la seva descripció, la font, l'any d'inici de la sèrie mensual i *Corr*, que recull la correlació entre les taxes anuals naturals de variació (primera diferència del logaritme) de la macromagnitud de referència i cada indicador.

Taula 1 Indicadors d'Agricultura <sup>3</sup>				
Nom	Descripció	Font	Any	Corr
AFI_AGRI	Afiliació Agricultura TGSS Darrer dia	TGSS	2000	0.0367
GASOILB	Gasoil-B	CLH	1986	-0.2725

Taula 2 Indicadors d'Indústria				
Nom	Descripció	Font	Any	Corr
AFIND	Afiliació Indústria TGSS Darrer dia	TGSS	2000	0.4490
IPI	Índice de Producción Industrial	INe	2002	0.4784
Dda_Elect	Energia elèctrica demandada	REE	1999	0.4777
GASOILA	Gasoil-A	CLH (Ibestat)	1986	0.5821
PARI	Atur Registrat Indústria	OTIB (Ibestat)	2000	-0.2955
X_VAL	Exportacions (valor)	ICEX (Ibestat)	2000	0.0538
X_VOL	Exportacions (volum)	ICEX (Ibestat)	2000	0.1798

<sup>3</sup>Es treballa amb només aquests dos indicadors, ja que, s'ha decidit treballar amb sèries temporals que estovueran disponibles a el menys des de 2002.

**Taula 3 Indicadors de Serveis**

<b>Nom</b>	<b>Descripció</b>	<b>Font</b>	<b>any</b>	<b>Corr</b>
AFSERV	Afiliació Serveis TGSS Darrer dia	TGSS	2000	0.4120
MV	Matriculació de vehicles	DGT(Ibestat)	2000	0.5590
PARSERV	Atur Registrat Serveis	OTIB (Ibestat)	2000	-0.7135
MERCA_MAR	Mercaderies embarc. i desembar. als ports	Autoritat Portuària	2000	0.6124
PAX_MAR	Passatgers arribats via marítima	Autoritat Portuària	2000	0.4912
PAX_AEROP_IB	Passatgers arribats via aèria	AENA (Ibestat)	1995	0.7263
PAX_CREUERS	Creueristes arribats	Autoritat Portuària	2000	0.3606
TUR_INT	Nombre turistes estrangers arribats	Ibestat	2000	0.4687
TUR_AL	Nombre turistes Alemania	Ibestat	2000	0.5944
TUR_ESP	Nombre turistes Espanya	Ibestat	2000	0.4122
TUR_FR	Nombre turistes França	Ibestat	2000	0.0290
TUR_IT	Nombre turistes Itàlia	Ibestat	2000	0.1410
TUR_UK	Nombre turistes Regne Unit	Ibestat	2000	0.4332
HOT_PERNOC	Pernoctacions hoteleres	INE-Ibestat	1999	0.4834
APART_PERNOC	Pernoctacions a apartaments	INE-Ibestat	2000	0.0029
HOT_VIATG	Viatgers a hotels	INE-Ibestat	1999	0.4434
APART_VIATG	Viatgers a Apartaments	INE-Ibestat	2000	0.5442
PIB_MES_AL	Índex volum de PIB Alemanina mensualitzat	Eurostat	2000	0.7478
PIB_MES_ESP	Índex volum de PIB Espanya mensualitzat	Eurostat	2000	0.8546
PIB_MES_FR	Índex volum de PIB França mensualitzat	Eurostat	2000	0.7781
PIB_MES_IT	Índex volum de PIB Itàlia mensualitzat	Eurostat	2000	0.8784
PIB_MES_UK	Índex volum de PIB Regne Unit mensualitzat	Eurostat	2000	0.6327
IPH_IB	Índex de pressió Humana (IPH)	Ibestat	1997	0.4810

**Taula 4 Indicadors de Construcció**

<b>Nom</b>	<b>Descripció</b>	<b>Font</b>	<b>Any</b>	<b>Corr</b>
AFICO	Afiliació Construcció TGSS Darrer dia	TGSS	2000	0.7969
FINAL_OBRA	Certificats de final d'obra	Ibestat	2000	0.6009
LICI_OF	Licitació Oficial	M. Foment	1989	0.4510
MATRI_CAM	Matriculació de camions	DGT (Ibestat)	2000	0.3395
PARCO	Atur registrat a la construcció	OTIB (Ibestat)	2000	-0.1995
PRO_VI_EUR	Projectes vistats. Pressupost	COAIB	1987	0.4485
PRO_VI_MET	Projectes vistats. Metres quadrats	COAIB	1987	0.2974
PRO_VI_NU_EXP	Projectes vistats. Nombre expedients	COAIB	1987	0.5342
PRO_VI_NU_VIV	Projectes vistats. Habitatges	COAIB	1987	0.4329



**Taula 5 Indicadors d'Activitat Total**

<b>Nom</b>	<b>Descripció</b>	<b>Font</b>	<b>Any</b>	<b>Corr</b>
Afi_IB	Afiliació Mitjana TGSS	TGSS	2001	0.9256
IVA_suau	Recaptació tributària per IVA	AEAT	1993	0.2202
IRPF_suau	Recaptació tributària per IRPF	AEAT	1993	0.7436
Import	Importació de bens de consum durador	ICEX	2000	0.4244
CRE	Crèdits	BdE	1987	0.2099
DEP	Depòsits	BdE	1987	0.5395
Llars	Llars de l'EPA	Ibestat	2002	0.2665
ETCL	Salari de l'Enquesta Tri. de Costes Laborals	INE	2000	0.0525
Brent_Euros	Preu del petroli Brent en €	EIA	1999	0.1384
Dda_Elect	Energia elèctrica demandada	REE (Ibestat)	1999	0.4077
MV	Matriculació de vehicles	DGT (Ibestat)	2000	0.4818
IPH_IB	Índex de pressió Humana (IPH)	Ibestat	1997	0.4318
PAX_AEROP_IB	Passatgers arribats via aèria	AENA (Ibestat)	1995	0.6624

Tal com es pot apreciar en les taules de la 1 a 5 no tots els indicadors tenen una correlació elevada amb la macromagnitud de referència. Un mètode dels més utilitzats per a la construcció d'indicadors sintètics és el mètode de components principals, però en context de la situació en què ens trobem per a les Illes Balears resulta més útil utilitzar com a mètode de ponderació o construcció de l'indicador sintètic el mètode de partial Least Squares que descrivim en el següent apartat.

### 2.3 Mètodes de Ponderació o Construcció d'Indicadors Sintètics (PLS i Sparse PLS)

Partial least Squares (PLS) és un mètode relativament nou d'estimació de regressions, que ha estat proposat per facilitar l'estimació de models de regressió múltiple quan hi ha un nombre elevat però finit de regressors (en el nostre cas indicadors). En el nostre cas,

$$y_t = \alpha' x_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

on la variable  $y_t$  és la macro-magnitud de referència i  $x_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}]'$  és un vector de dimensió  $k \times 1$  (i per tant  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]'$  també és de dimensió  $k \times 1$ ) on es recullen els indicadors parcials. PLS és d'utilitat quan  $k$  és un nombre massa alt com per poder estimar els elements de  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]'$  per mínims quadrats ordinaris (Least Squares), o per evitar problemes de multicolinealitat en l'estimació de (1).

La idea bàsica de PLS és bastant similar a l'anàlisi de components principals, en el sentit que en lloc d'utilitzar les variables originals utilitzarem factors o components  $F_t = [F_{1t}, F_{2t}, \dots, F_{rt}]'$ , obtinguts com combinacions lineals de les variables, en lloc les variables recollides a  $x_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}]'$ . Així,

$$y_t = \Gamma' F_t + e_t \quad (2)$$

Però la diferència fonamental entre l'anàlisi de components principals (PC) i PLS consisteix que, mentre a PC, els components o factors es construeixen tenint en compte només els valors de les variables recollides a  $x_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}]'$ , a PLS la dependència entre  $y_t$  i  $x_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}]'$  també s'utilitza amb vista a obtenir els components o factors. Conceptualment, els factors o components obtinguts mitjançant PLS, són aquelles combinacions lineals de  $x_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}]'$ , que podem denotar per  $\Psi x_t$ , que proporcionen la màxima correlació entre  $y_t$  i  $\Psi x_t$ , però que són ortogonals entre si.

A continuació descrivim a l'algorisme proposat per Helland (1990) i Groen i Kapetanios (2008) per a l'obtenció de  $r$  factors o components  $f_{1t}, f_{2t}, \dots, f_{rt}$  (assumint per simplicitat que les variables recollides a  $y_t$  i  $x_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}]'$  han estat normalitzades de manera que té mitjana zero):

1. Inicialitzar  $u_t = y_t$  i  $v_{i,t} = x_{i,t}$ , per a  $i = 1, \dots, k$ . Així mateix,  $j = 1$ .
2. Determinar el vector de pesos o càrregues factorials  $\omega_j = [\omega_{1,j}, \omega_{2,j}, \dots, \omega_{k,j}]'$  d'ordre  $k \times 1$ , emprant  $\omega_{i,j} = \text{cov}(u_t, v_{i,t})$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Obtenir el  $j$ -èsim factor utilitzant la combinació lineal  $f_{j,t} = \omega_j' u_t$ .
3. Regressar  $u_t$  i  $v_{i,t}$ ,  $i = 1, \dots, k$  sobre  $f_{j,t}$ . Denotant als residus  $\tilde{u}_t$  i  $\tilde{v}_{i,t}$  respectivament.
4. Si  $j = k$  parar, sinó establir  $u_t = \tilde{u}_t$ ,  $v_{i,t} = \tilde{v}_{i,t}$   $i = 1, \dots, k$  i  $j = j + 1$  i anar a la passada 2.

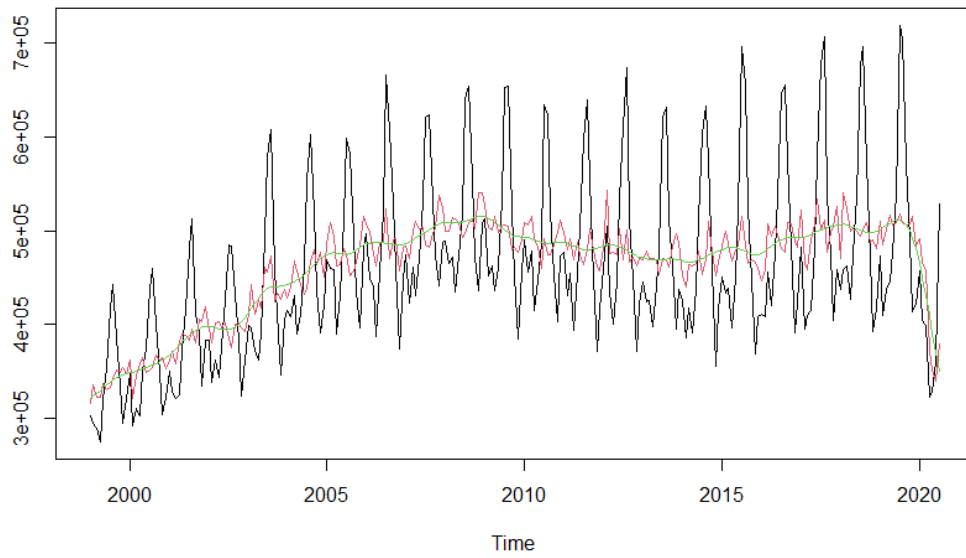
A l'hora d'implementar aquest procediment treballem amb les variables en taxes de variació logarítmiques (primeres diferències sobre logaritmes neperians) amb freqüència anual. Per tant,  $x_t = [x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}]'$  seran les taxes de variació logarítmiques anuals dels indicadors parcials i  $y_t$  les taxes de variació logarítmiques anuals de la macro-magnitud de referència. Utilitzant l'algorisme esmentat anteriorment s'obtenen les ponderacions dels factors, es calculen un màxim de  $k$  factors / pesos.

Atès que no tots els indicadors de les Taules 1 a 5 semblen estar molt correlacionats amb la macromagnitud de referència utilitzarem també com a mètode de ponderació per a la construcció dels indicadors sintètics el mètode de Sparse PLS proposat per Chun i Keles (2010), que introdueix una restricció de *sparsity* i permet que els coeficients associats a les indicadors que es trobin més allunyats de les restricció en forma de romboide imposada pels mètodes d'estimació tipus Sparse o Lasso quedin fixats a zero per a la construcció dels factors  $f_{j,t}$ .

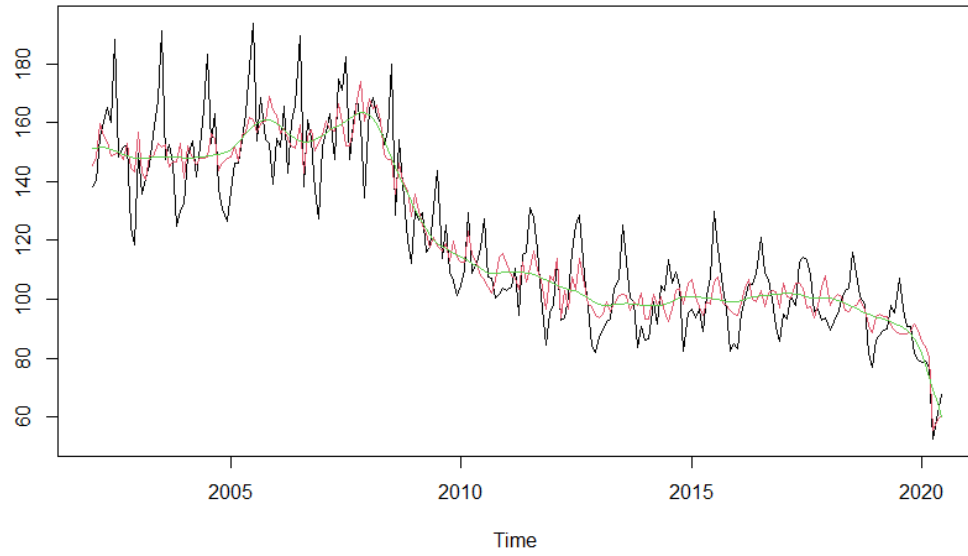
## 2.4 Tractament previ dels indicadors

Per a cada indicador parcial s'estreu el seu component cicle tendència utilitzant jDemetra + que combina el procediment basat en models ARIMA recollit en el paquet TRAM-SEATS (veure Gómez i Maravall, 1996, i Caporello i Maravall, 2004) juntament amb el X-12ARIMA del Bureau of the Census. Les estimacions dels senyals cicle-tendència obtingudes per als indicadors recollits en les Taules

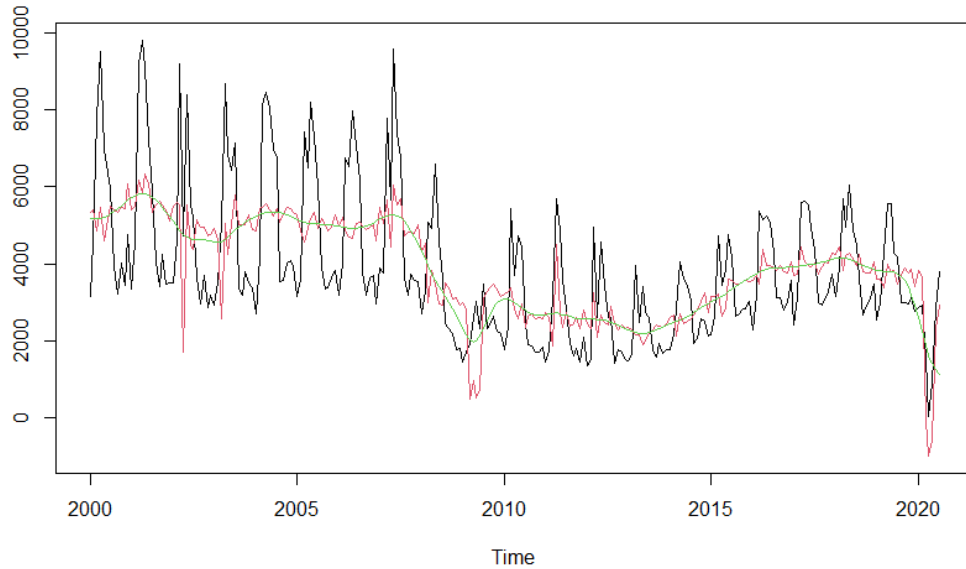
1 a 5 amb el jDemetra + segueixen tenint una evolució molt erràtica com es pot apreciar en els següents gràfics.



Energia elèctrica demandada, sèrie original, cicle-tendència i cicle-tendència HP



IPI, sèrie original, cicle-tendència i cicle-tendència HP



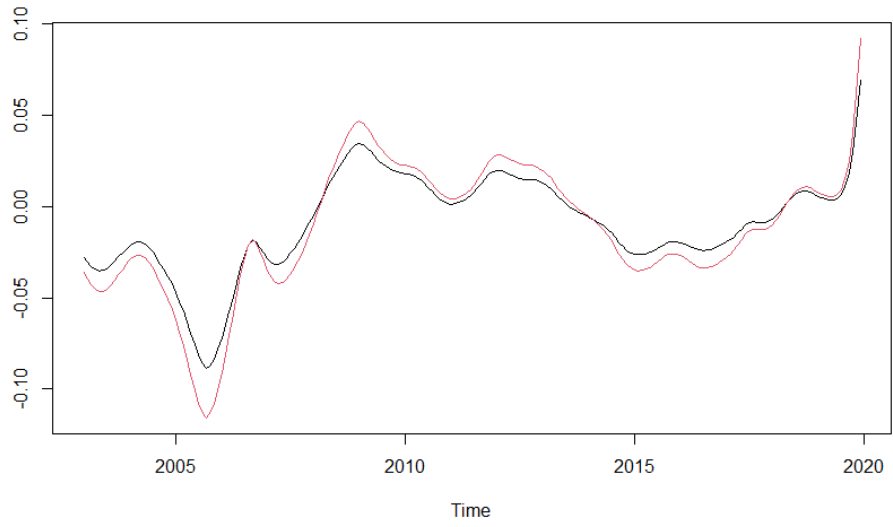
Matriculació de Vehicles, sèrie original, cicle-tendència i cicle-tendència HP

Per a un cas d'indicadors presos com a exemple, pel que s'ha optat per seguir la metodologia proposada per Gomez i Bengoechea (1998) i aplicar el filtre de Hodrick i Prescott (HP) amb un paràmetre  $\lambda = 68.738376$  que permet d'obtenir una versió simètrica d'un filtre de Butterworth de si potència meitat en  $2\pi/20$ . En els gràfics anteriors de la línia negra representa la sèrie original, la vermell és el cicle tendència obtingut com jDemetra + i finalment la verda senyal suavitzada obtinguda després d'aplicar el filtre HP a l'cicle-tendència obtinguda pel procediment jDemetra +.

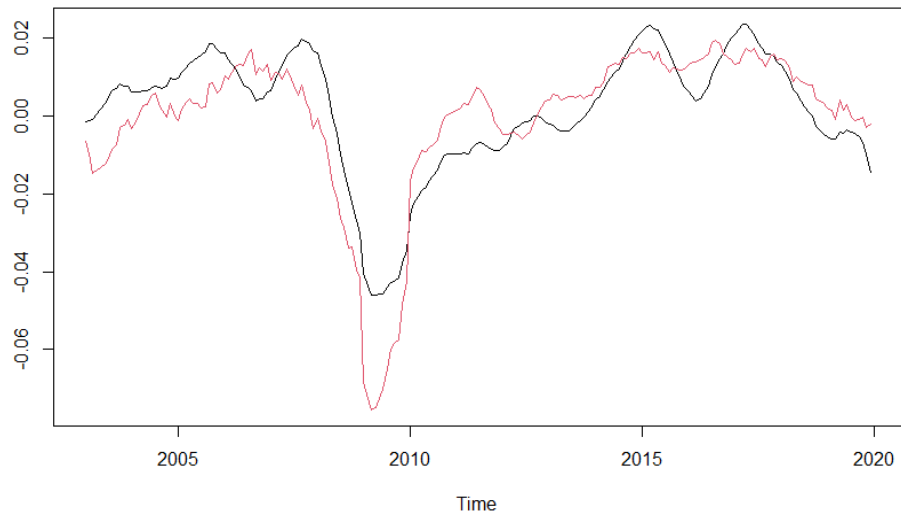
Finalment, el paquet TRAM permet suplir tot el cost informatiu dels filtres utilitzats per a l'estimació de l'component cicle tendència i suplir amb prediccions la manca d'informació puntual sobre algun indicador.

## 2.5 Indicadors sintètics estimats

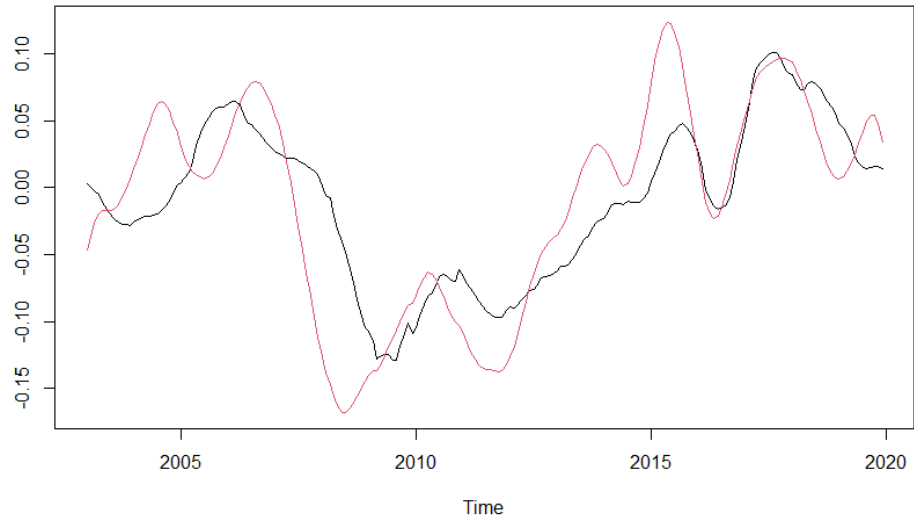
En els següents gràfics es recull l'evolució dels indicadors sintètics obtinguts a nivell mensual pel procediment de PLS i SPLS amb un paràmetre de "sparsity" igual a 0.7.



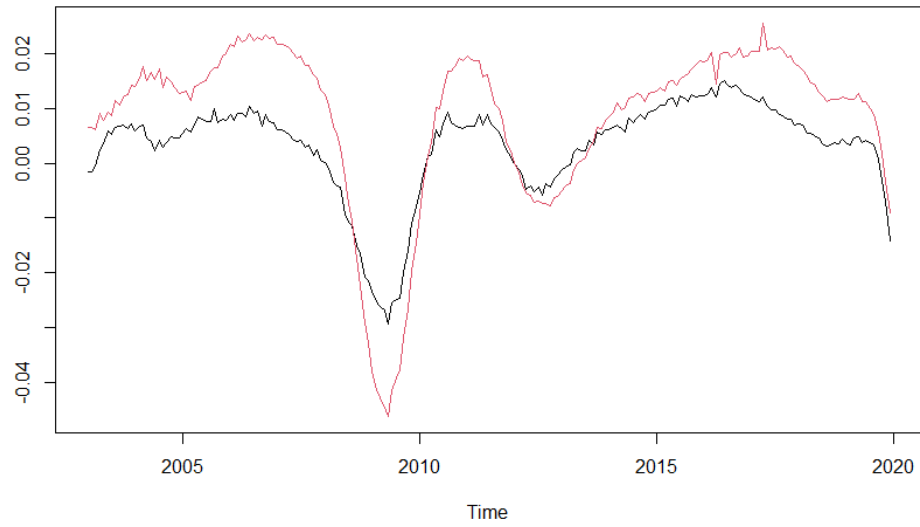
Agricultura



Indústria



Construcció



Serveis



Total

En la següent secció es considera la reconciliació del anteriors indicadors sectorials amb l'agregat, així com l'ancorament simultani de les sèries dels indicadors sintètics sectorials i agregat a les sèries de referència anual.

### 3 Ancorament i reconciliació del sistema d'indicadors de les Illes Balears

Un sistema d'indicadors sintètics com els obtinguts en l'apartat anterior presenta dos problemes per als analistes: d'una banda, no estan ancorats a una index de referència anual, més fiable, que l'estimació de l'indicador; i, d'una altra, que les estimacions dels indicadors agregats no solen ser compatibles amb l'estimació directa obtinguda per a l'estimador agregat, de manera que cal reconciliar les estimacions. Els dos problemes han estat tractats satisfactòriament a Dagum i Cholette (2006) i un resum de com es tracten ambdós problemes es mostra a l'apèndix 1.

Els resultats de Dagum i Cholette (2006) són, bàsicament, per a reconciliació de diverses fonts, com per exemple, enquestes de diferent periodicitat i/o abast territorial/sectorial, i on normalment les dades tenen unitats de mesura associades. Aquests mètodes poden adaptar-se al cas d'un sistema d'indicadors on la informació rellevant són les taxes de creixement adimensionals, o el que és equivalent, un número índex. Entre les adaptacions que cal tenir en compte dels



mètodes de Dagum i Cholette (2006) són: 1) que la reconciliació es determina a partir de ponderacions que varien al llarg del temps, i no per equiponderació que és el cas habitual considerat per aquells autors; 2) així com l'ancorament a la magnitud anual de referència. Totes les adaptacions i variacions considerades es mostren a l'apèndix 2, mentre que les rutines en R que ho implementen està llistat a l'apèndix 3, mentre que el codi de totes aquestes funcions es troba al fitxer `BenchMark_rutines_v4.R` que s'adjunta amb aquest document.

Aquestes funcions han permès escriure diversos *scripts*, que també s'ajunen amb aquest document, que executen de manera automatitzada el càlcul dels indicadors sintètics, en presenten el resultat dels indicadors ancorats i reconciliats i permeten la visualització gràfica d'aquests. Així, els fitxers `Benchmark_proves_v3.R` (dades trimestrals) i `Benchmark_proves_v4.R` (dades mensuals) llegeixen les dades i apliquen les rutines per tal d'obtenir estimacions dels indicadors ancorades i reconciliades i mostrar-ne els principals resultats i gràfics.

Atès que el sistema d'indicadors sintètics parcials de la primera etapa mostrats a la secció anterior a hores d'ara no és complet, mancant la component territorial i la turística, els mètodes de ancorament, reconciliació i reconciliació amb ancorament, considerats més detalladament en els apèndixos 1 i 2, han estat posats a prova a partir del sistema d'indicadors actualment en funcionament. Els principals resultats d'aquest exercici es mostren en el següent apartat. Posteriorment, es considera l'aplicació de les eines desenvolupades al nou sistema d'indicadors mensuals desenvolupat a la secció 2.

### 3.1 Aplicació al sistema d'indicadors trimestrals actual

El punt de partida és el sistema d'indicadors actualment en funcionament a la DGMEQ, de periodicitat trimestral, a més d'informació relativa a índexos de valor anuals base 2015 del VAB, agricultura, indústria, construcció i serveis i els pesos del agregats territorials (mallorca, Menorca, Pitiüses) en el total a partir dels quals també es poden construir índexos de valor base 2015. El període cobert abasta 2001-2019 per a les dades anuals i per a les trimestrals del sistema d'indicadors sintètics, també un trimestre del 2020. El fitxer `Benchmark_proves_v3.R` conté el codi R que llegeix les dades anuals i trimestrals i aplica les rutines d'ancorament i reconciliació programades a `BenchMark_rutines_v3.R`. Tot seguit es mostra i comenten els principals resultats obtinguts en aquest exercici.

En primer lloc, tal i com mostra la Figura 1, on la sèrie en color negre mostra l'evolució de l'indicador del sintètic del VAB, mentre que en color roig es mostra la nova estimació de l'indicador sintètic però ancorat a la dada anual de referència (color blau). Es comprova com el fet d'ancorar l'indicador sintètic a la magnitud anual de referència, dona lloc a un augment important de l'ajust així com un seguiment més fidel de l'evolució de la sèrie.

D'altra banda, la reconciliació de les estimacions sectorials sense ancorar-les a la magnitud anual de referència, tal i com es mostra a la Figura 2 per a les sèries territorials conciliades i a la Figura 3 per al sector dels serveis, no aconsegueix recollir completament bé la pauta d'evolució dels Índexs de Valor

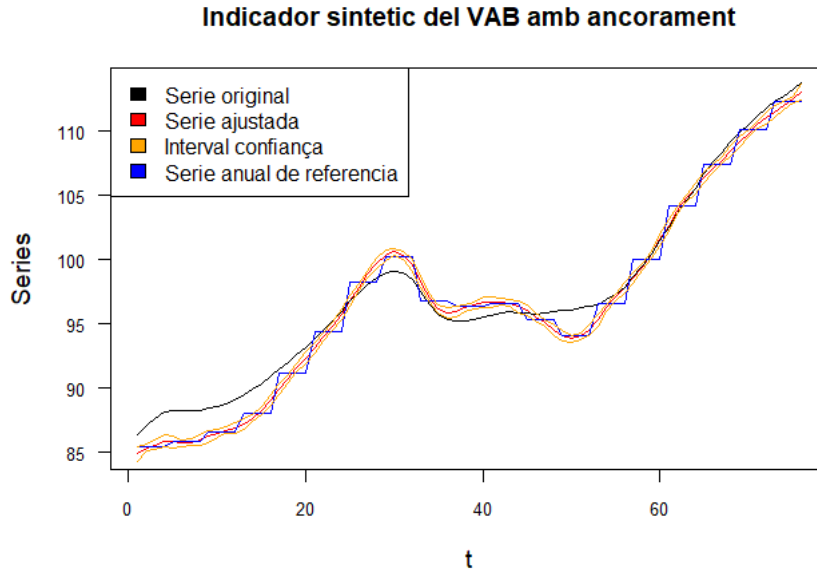


Figure 1: Efecte de l'ancorament

anuals.

La Figura 3.1 mostra l'evolució de les taxes de variació interanual de les sèries agregades amb conciliació i sense ancorament. Es mostra com a referència les taxes interanuals de l'indicador sintètic agregat i ancorat a l'índex de volum del VAB així com les xifres de referència de la serie anual (taxes de variació anual de l'índex de volum de VAB). Es comprova que sense ancorament, l'evolució és poc satisfactòria

En canvi, quan a més de reconciliació hi ha ancorament, s'aconsegueix un ajust molt més satisfactori i com es pot comprovar a les Figures 4 que mostra les estimacions de sectorials i territorials amb reconciliació i ancorament, Figura 5 per al cas específic del sectori serveis (comparable amb la figura 3) i la Figura 6 (comparable amb 3.1) que recull les taxes de variació interanual calculades sobre l'indicador sintètic del VAB de l'etapa 1, l'indicador ancorat i les mitjanes ponderades que resulten de les agregacions territorials o sectorials. Com a referència es mostren les taxes interanuals de l'indicador sintètic agregat i ancorat a l'índex de volum del VAB. Es comprova en tots els casos que l'ajust millora notablement amb l'ancorament.

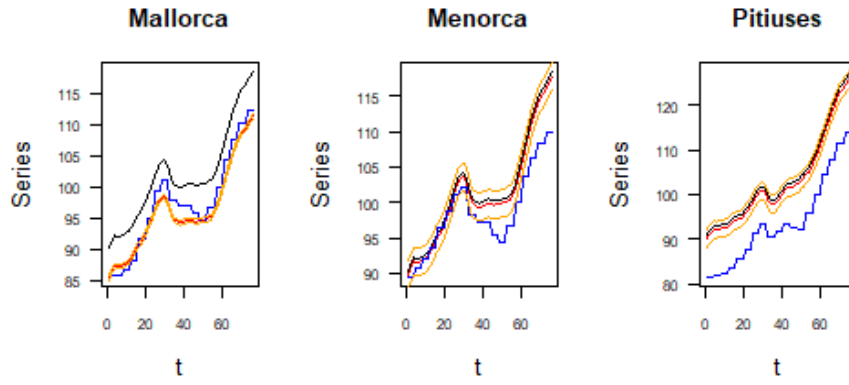


Figure 2: Desagregació territorial amb reconciliació i sense ancorament.

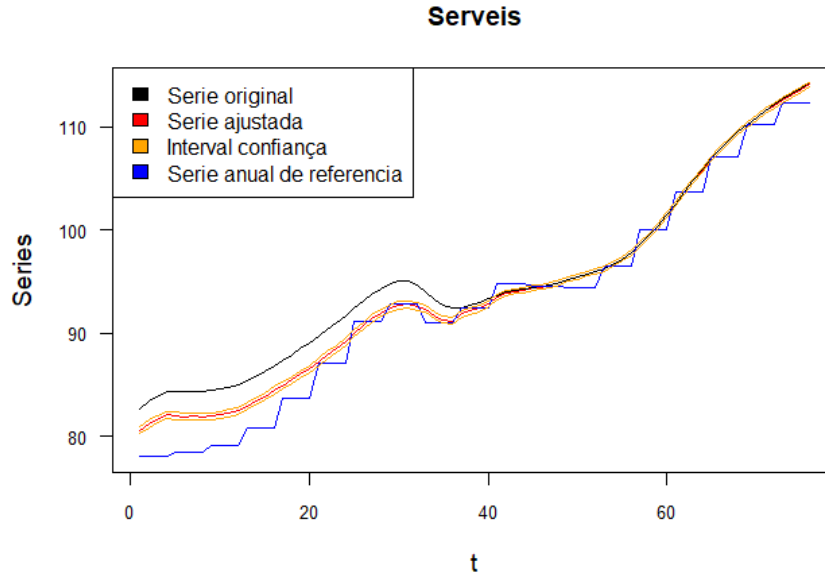


Figure 3: Sector serveis amb reconciliació sense ancorament

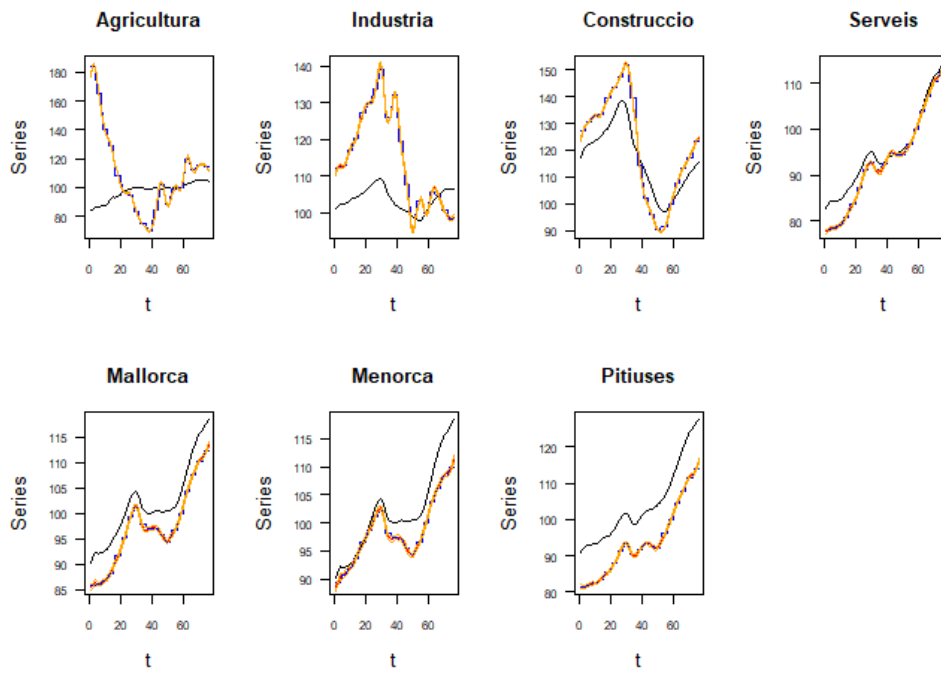
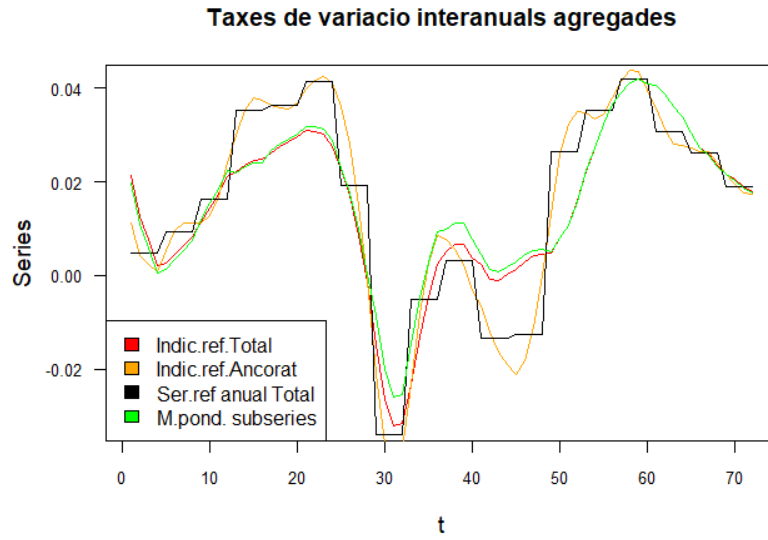


Figure 4: Desagregació sectorial i territorial amb reconciliació i ancorament.

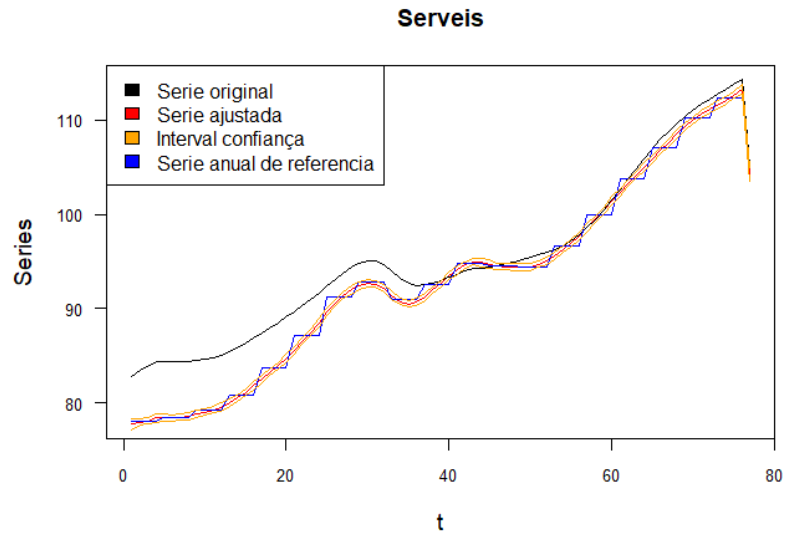


Figure 5: Sector serveis amb reconciliació i ancorament

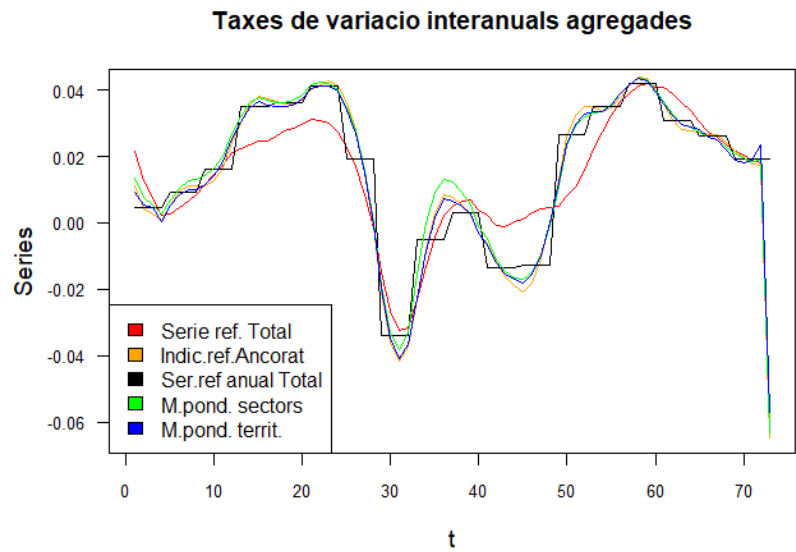


Figure 6: Taxes de variació interanual de les sèries agregades amb conciliació i ancorament

### 3.1.1 Sensibilitat dels resultats i calibratge

Les rutines de reconciliació i ancorament programades depenen d'un conjunt de paràmetres que per defecte prenen valors prefixats, ja sigui a suggeriment de Dagum i Cholette (2006) o bé, en un procés heurístic, s'ha fixat en uns valors que proporcionen bons resultats. Aquest paràmetres estan relacionats amb l'estructura de dues matrius de variàncies i covariàncies dels termes d'error. Per exemple, en el model donat per les expressions (36) i (37) hi apareixen els termes d'error  $\mathbf{e}$ , associat a (36) i  $\varepsilon$  (37). Pel que fa al primer terme,  $\mathbf{e}$ , aquest recull la discrepància entre els indicadors observats-estimats (primera etapa) amb els que sorgiran de l'ancorament i reconciliació ( $\boldsymbol{\theta}$ ). Normalment, vegeu Dagum i Cholette (2006 p. 93), s'imposa una estructura autorregressiva de primer o segon ordre a fi de que els canvis període a període de l'estimador siguin relativament suaus. Així es suggereix el valor del paràmetre AR(1) que estigui a l'interval  $0.7 \leq \varphi \leq 0.90$  per a sèries mensuals i de  $0.7^3 \leq \varphi \leq 0.90^3$  per a dades trimestrals. El valor  $\varphi = 0.9$  sol donar bons resultats. Per al model AR(2) suggereixen  $(1 - \varphi L)(1 - \varphi^2 L)$  amb valors de  $\varphi$  com els del model AR(1).

Quant al segon terme,  $\varepsilon$ , aquest recull la discrepància entre les xifres dels agregats (territorials, sectorials i anuals),  $\varepsilon = (\varepsilon'_{\text{sec}}, \varepsilon'_{\text{ter}}, \varepsilon'_{a,\text{sec}}, \varepsilon'_{a,\text{ter}})'$ , i és pràctica comuna imposar que la seva matriu de variàncies i covariàncies és diagonal per blocs, i les variàncies de cadascun dels quadre termes d' $\varepsilon$ , pot prendre valors diferents.<sup>4</sup> Si per algun terme de  $\varepsilon$  la seva variància fos nul·la aleshores, la restricció implicada és constrenyent.

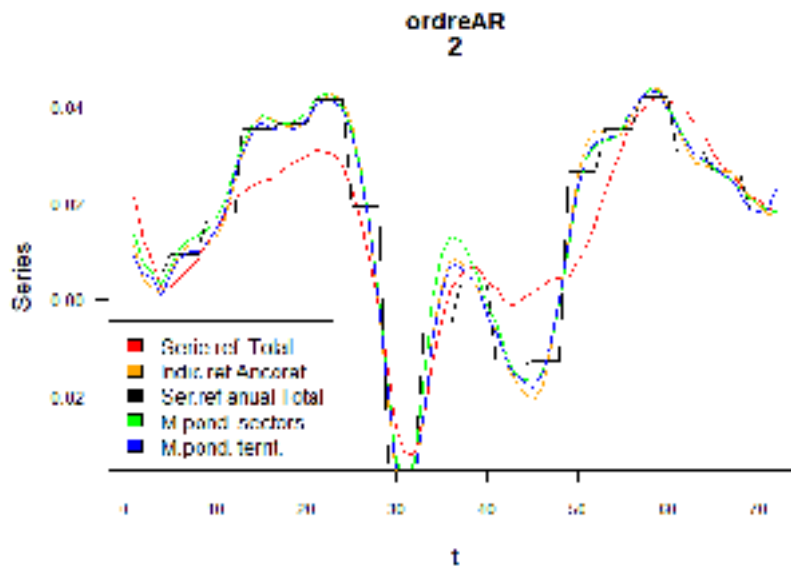
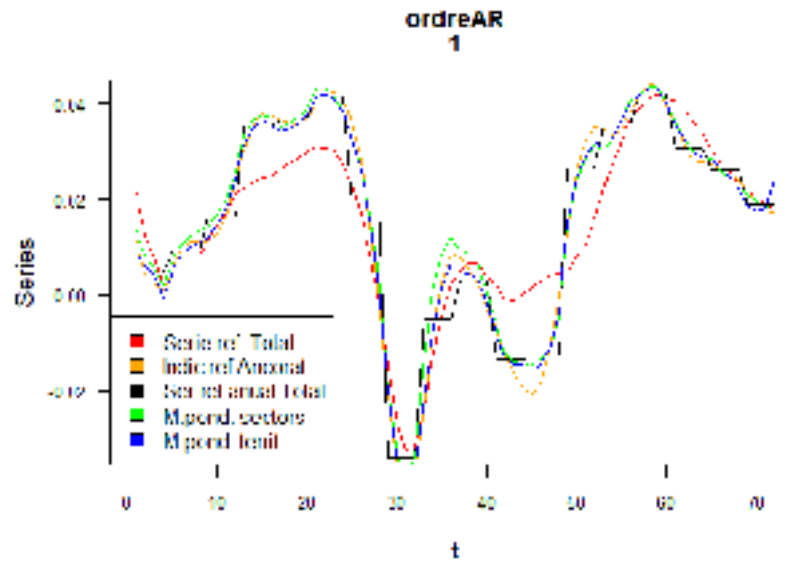
A les rutines implementades, els paràmetres estan inicialitzats per defecte a: un ordre del AR de 2, un paràmetre AR  $\varphi = 0.90$  i  $V_{\varepsilon} = \text{diag}(0.4, 0.5, 0.01, 0.01)$ . Els valors propers a zero de  $V_{\varepsilon_{a,\text{sec}}} = V_{\varepsilon_{a,\text{ter}}} = 0.01$  impliquen que les estimacions obtingudes dels indicadors agregades temporalment (gairebé) coincidiran amb els resultats anuals de referència. A fi d'analitzar la sensibilitat dels resultats s'ha efectuat un estudi on es calcula i visualitza, segons van variant els valors dels paràmetres de calibratge, l'evolució de les taxes de creixement del VAB de la sèrie de referència, les de l'indicador agregat sense ancorar, l'ancorat, i les que resulten d'agregar els indicadors sectorials i territorials estimats imposant reconciliació i ancorament.

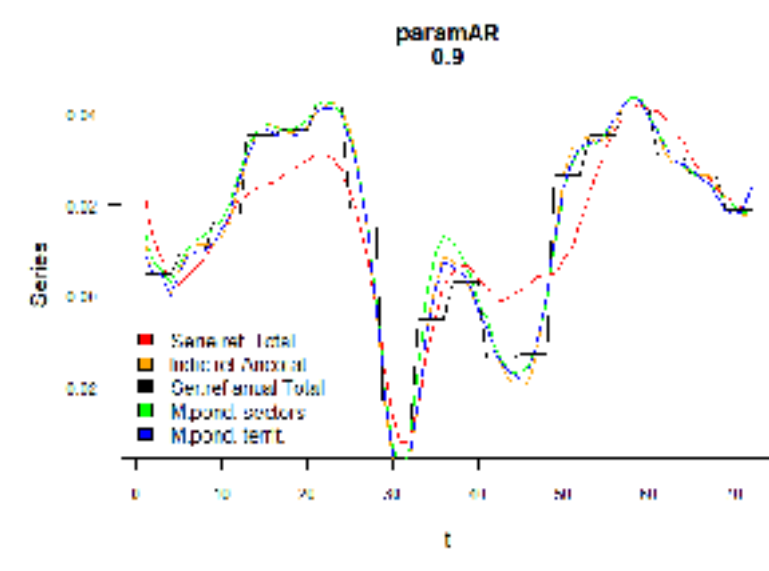
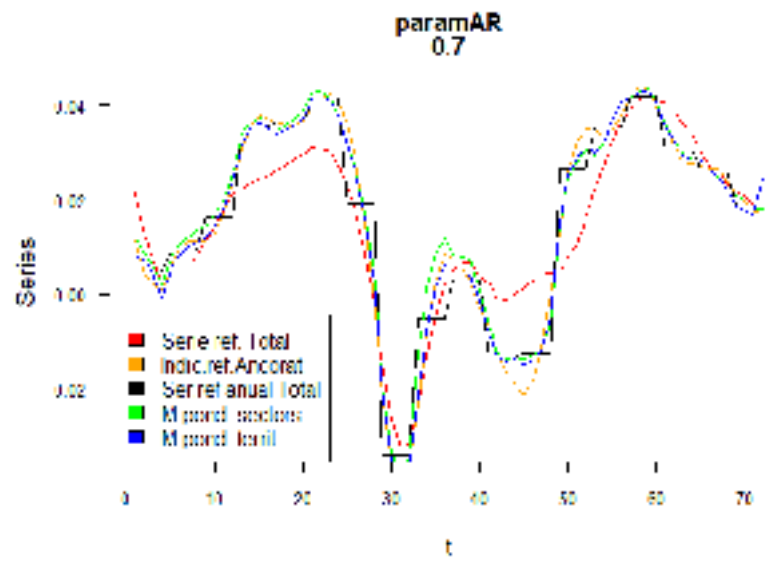
Les figures mostren els ajustos de les taxes agregades que resulten segons diversos valors dels paràmetres, com són l'ordre de l'AR, Figures 3.1.1 i 3.1.1, o el valors del paràmetre autorregressiu, Figures 3.1.1 i 3.1.1.

## 3.2 Aplicació al nou sistema d'indicadors mensuals

El fitxer `Benchmark_proves_v4.R` conté el codi R que llegeix les dades anuals i mensuals, aplica les rutines d'ancorament i reconciliació programades a `BenchMark_rutines_v4.R` i mostra els principals resultats i gràfics. Del conjunt de resultats, i a efectes il·lustratius, en comentarem només alguns que consideram més representatius.

<sup>4</sup>Val a dir que la magnitud de les variàncies s'ha d'interpretar en termes de la variància d' $\mathbf{e}$ .







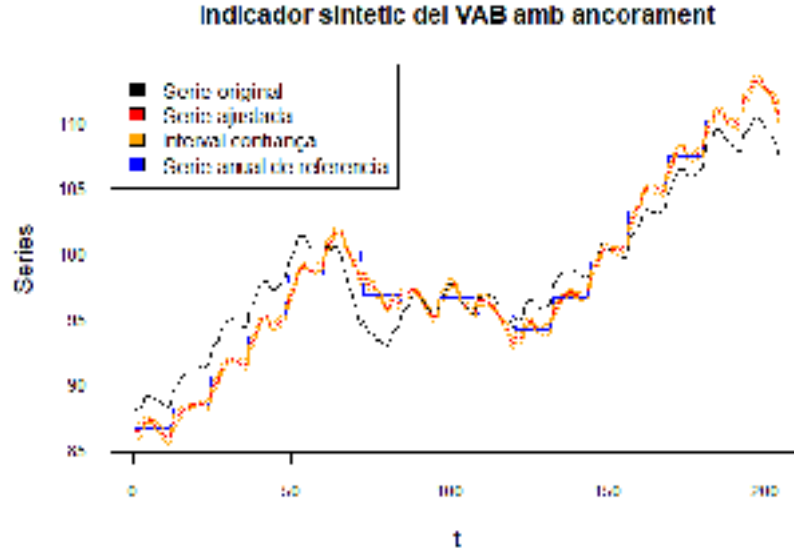


Figure 7: Indicador sintètic mensual del VAB amb ancorament (PLS)

Per l'indicador obtingut a l'etapa 1 mitjançant *Partial Least Squares* (PLS), la Figura 7 mostra l'evolució de l'Index de Volum associat a l'indicador sintètic del VAB de la primera etapa amb i sense ancorament, mentre que la Figura presenten els ajustos per a la desagregació sectorial 8. L'evolució de les taxes de variació agregades així com la de referència es pot observar al gràfic 9.

Per la seva banda, les Figures 10 a 11, mostren els resultats equivalents per als indicadors sintètics obtingut mitjançant *Sparse Partial Least Squares* (SPLS). Els resultats són bastant similars als del mètode PLS. Així mateix, es comprova que, tant per als indicadors obtinguts per PLS com per SPLS, l'ancorament amb reconciliació dóna lloc a una millora considerable de l'ajust de les sèries a la magnitud anual de referència.

## 4 Conclusions i línies futures de treball

Els resultats obtinguts i presentats a les seccions 2 i 3 es poden considerar molt satisfactoris, tant pel que fa als nous indicadors sintètics mensuals com als mètodes de reconciliació i ancorament desenvolupats per tal que la seva evolució fos coherent internament (reconciliació) així com anclada a una sèrie anual de referència com és (l'index de volum del) VAB. Com s'ha pogut observar en el gràfics de la secció 3, l'ajust aconseguit en termes de seguiment fidel de l'evolució de dita magnitud de referència millora considerablement. A més, les

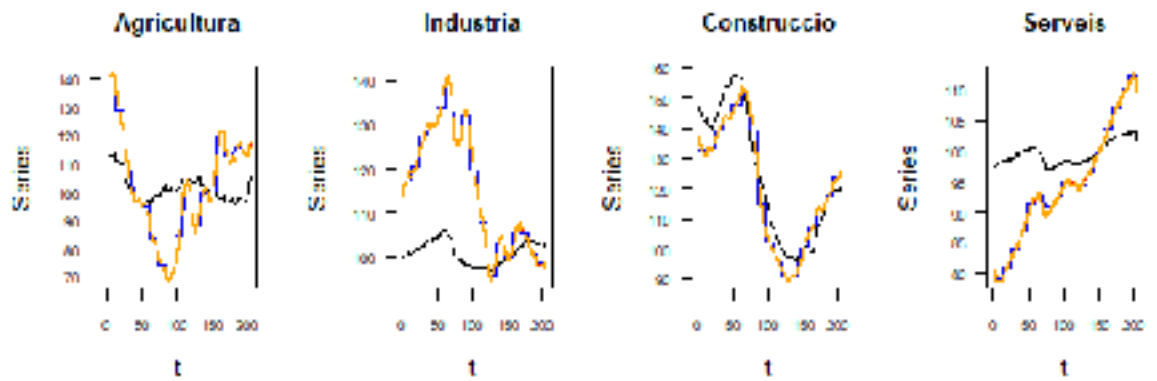


Figure 8: Indicadors sintètics mensuals sectorials amb reconciliació i ancorament (PLS)

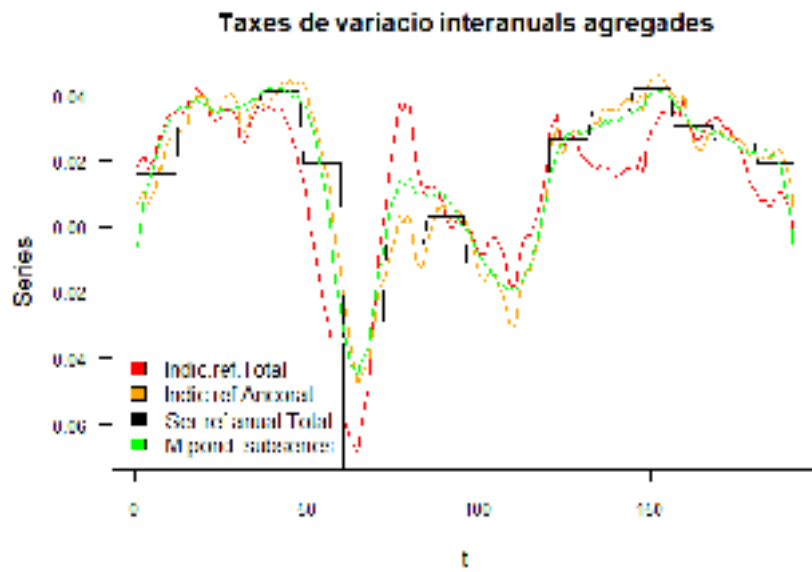


Figure 9: Taxes de variació interanuals de les taxes agregades i de referència (PLS)

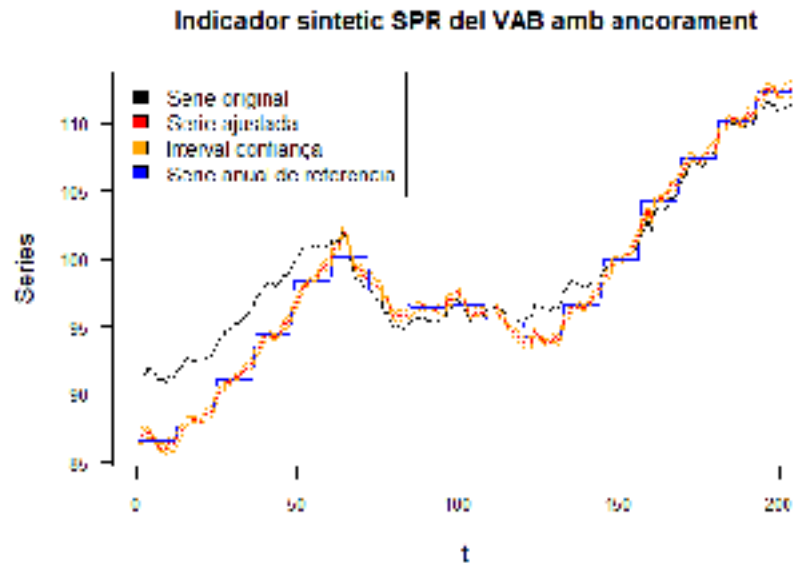


Figure 10: Indicador sintètic mensual del VAB amb ancorament (SPLS)

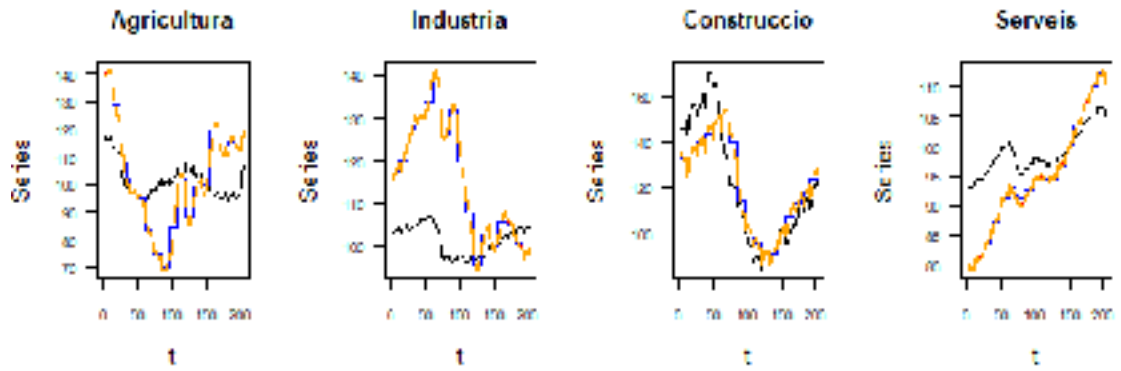


Figure 11: Indicadors sintètics mensuals sectorials amb reconciliació i ancorament (SPLS)

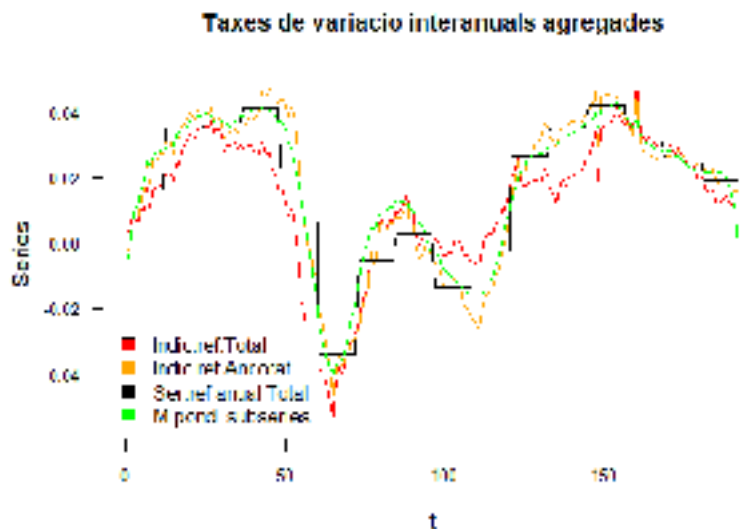


Figure 12: Taxes de variació interanuals de les taxes agregades i de referència (SPLS)

rutines implementades en R per a l'automatització de les tasques de seguiment de la conjuntura, permeten afinar els paràmetres del model, a fi de calibrar-lo per aconseguir millorar l'ajust.

La nova metodologia per al seguiment de la conjuntura implementada en aquest treball, és no només una eina molt útil, sinó que també situa a les Illes Balears en capdavanteres, atès que, segons el nostre coneixement, ningú més aplica tècniques de reconciliació i ancorament similars a les nostres per al seguiment de la conjuntura.

Tot i la important tasca duta a terme, aquesta no és pot donar per completament finalitzada, a la qual cosa els autors d'aquest informe en el termini de dos mesos a partir del lliurament d'aquest document. Entre les tasques que cal finalitzar està en el sistema d'indicadors desagregat territorialment, sobre el qual ja s'hi treballa i el qual presenta la dificultat de què només es disposa d'un any de referència per a l'ancorament. Aquest està molt allunyat en el temps, el 2004, i prové del Marc Input-Output de les Illes Balears 2004 i de Mallorca, Menorca i Eivissa-Formentera (Govern de les Illes Balears, 2007).

En segon lloc, també s'està treballant en l'indicador sectorial turístic, però només es disposa d'una dada anual de referència, la del 2014, obtinguda a partir de la comptabilitat satel·lit del Turisme (AETIB i IBESTAT, 2020).<sup>5</sup> A més, té

<sup>5</sup> Així mateix, també hi ha una estimació per al 2004 obtinguda a partir del Marc Input-Output del 2004 (Direcció General d'Economia, 2010).

el problema que, a diferència dels sectorials, no verifica restriccions d'agregació.<sup>6</sup>

## 5 Apèndix 1

En aquest apèndix es recull un resum dels mètodes de desagregació temporal de Chow Lin (1971) i els de *benchmark* i reconciliació de Dagum i Cholette (2006).

### 5.1 El mètode de Chow Lin

Signi  $N$  el nombre d'anys o períodes a desagregar,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)'$ ,  $T = sN$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_T)'$  el vector de valors desagregats (trimestralment, mensualment...), que estan relacionats amb  $y$  de manera que  $\mathbf{y} = B\mathbf{z}$  on  $C = I_N \otimes \mathbf{i}_s/s$ ,  $\mathbf{i}_s = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times s}$  si es tracta de distribuir el valor anual (variables flux), o bé,  $C = I_N \otimes \mathbf{j}_s$ ,  $\mathbf{j}_s = (1, 0, \dots, 0)_{1 \times s}$  si es tracta d'interpol·lar (variables stock). Les matrius  $C$  són, per tant, d'ordres  $N \times sN$ . Quan es tracta d'obtenir valors desagregats més enllà de la darrera dada agregada disponible, es denomina d'extrapolació.

Asumim que  $\mathbf{z} = X\beta + \mathbf{u}$ , on  $X$  és una matriu  $T \times k$  d'observacions d'indicadors, que pot contenir tendències deterministes, variables fictícies estacionals, ...,  $E(\mathbf{u}) = 0$ ,  $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2 V$ . Notem que  $\mathbf{y} = C\mathbf{z} = CX\beta + C\mathbf{u} = X_a\beta + \mathbf{u}_a$ , on  $X_a = CX$ ,  $\mathbf{u}_a = C\mathbf{u}$  i  $E(\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a') = \sigma^2 CVC'$ .

Chow i Lin (1971) mostren que, sota aquests supòsits, els estimadors BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) dels paràmetres i dels valors desagregats venen donats per

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \left( X'C'(CVC')^{-1}CX \right)^{-1} X'C'(CVC')^{-1}\mathbf{y} \\ &= \left( X'_a(CVC')^{-1}X_a \right)^{-1} X'_a(CVC')^{-1}\mathbf{y}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} &= X\hat{\beta} + BM_a\mathbf{y} \\ &= X\hat{\beta} + B(\mathbf{y} - CX\hat{\beta}) = X\hat{\beta} + B(\mathbf{y} - X_a\hat{\beta}) \\ &= X\hat{\beta} + B(\mathbf{y} - B\hat{\mathbf{z}}) = X\hat{\beta} + B(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{z}}_a) \\ &= X\hat{\beta} + B\hat{\mathbf{u}}_a,\end{aligned}$$

<sup>6</sup>En termes més tècnics, es proposa un ancorament del VAB turístic amb el mètode de benchmark basat en regressió de Cholette-Dagum. La informació de la que es disposa és:

- VAB turístic de 2014 (AETIB i IBESTAT, 2020), dada de referència a la qual ancorar. Binding restricció ( $\mathbf{V}_\varepsilon = 0$  per a aquesta restricció).
- Dada de 2015 proporcionada per AETIB. No tan fiable com l'anterior. Restricció no constrenyent ( $\mathbf{V}_\varepsilon > 0$  per a aquesta restricció) però aporta informació sobre el nivell.
- Dada de 2004, obtinguda a partir de MIO 2004 (Vegeu Direcció General d'Economia, 2010). Restricció no constrenyent ( $\mathbf{V}_\varepsilon > 0$ ).

on

$$\begin{aligned} M_a &\equiv I_N - CX \left( X' C' (CVC')^{-1} CX \right)^{-1} X' C' (CVC')^{-1}, \\ \hat{\mathbf{u}}_a &\equiv \mathbf{y} - CX \hat{\boldsymbol{\beta}} = M_a \mathbf{y} \end{aligned}$$

i

$$B \equiv VC' (CVC')^{-1}$$

és una matriu  $T \times N$ , que es pot interpretar com la matriu de coeficients de la regressió de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{u}_a = C\mathbf{u}$ , és a dir,  $E(\mathbf{u}\mathbf{u}'_a) (E(\mathbf{u}_a\mathbf{u}'_a))^{-1}$ . Notem que l'estimació  $\hat{\mathbf{z}}$  està composta de dues components,  $X\hat{\boldsymbol{\beta}}$  i  $B\hat{\mathbf{u}}_a$ , els residus estimats  $\hat{\mathbf{u}}_a$  pels coeficients de la regressió d' $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{u}_a$ , donats per  $B = VC' (CVC')^{-1}$ , de manera que  $B\hat{\mathbf{u}}_a$  es pot interpretar com una estimació d' $\mathbf{u}$ ,  $\hat{\mathbf{u}} = B\hat{\mathbf{u}}_a$ . Així mateix, notem que

$$\begin{aligned} C\hat{\mathbf{z}} &= CX\hat{\boldsymbol{\beta}} + CVC' (CVC')^{-1} \hat{\mathbf{u}}_a \\ &= X_a \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\mathbf{u}}_a = \mathbf{y}, \end{aligned}$$

que implica que les estimacions agregades coincideixen amb els valors observats.

## 5.2 El mètode de benchmark basat en regressió de Cholette-Dagum

### 5.2.1 Model additiu

Es disposa d'una sèrie anual de referència (benchmark)  $a_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , d'una sèrie subanual  $s_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , que estima la magnitud d'interès a més alta freqüència però amb menys precisió. Les discrepàncies anuals entre  $a_m$  i  $s_t$  venen donades per

$$d_m = a_m - \sum_{t=t_{1m}}^{t_{Lm}} j_{mt} s_t$$

on  $j_{mt}$  són fraccions de cobertura temporal i  $t_{1m}$  i  $t_{Lm}$ , són respectivament, el primer i el darrer períodes subanuals coberts per la sèrie de referència  $a_m$ . Per al cas de dades mensuals, les fraccions de cobertura serien totes 1 ( $j_{mt} = 1$ ,  $\forall t, m$ ) i  $d_m = a_m - \sum_{t=t_{1m}}^{t_{12m}} s_t$ .

El model additiu benchmark de Dagum i Cholette (2006) ve donat per

$$s_t = \sum_{h=1}^H r_{th} \beta_h + \theta_t + e_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$a_m = \sum_{t=t_{1m}}^{t_{Lm}} j_{mt} \theta_t + \varepsilon_m \quad m = 1, \dots, M \quad (4)$$

$\theta_t$  és la sèrie real subanual inobservada que satisfà (4), el terme  $\sum_{h=1}^H r_{th} \beta_h$  recull possibles biaixos deterministes,  $e_t$  i  $\varepsilon_m$  són dos termes d'error tals que

$E(\varepsilon_m) = 0, E(\varepsilon_m^2) = \sigma_{\varepsilon_m}^2, E(\varepsilon_m e_t) = 0, E(e_t) = 0, E(e_t e_{t-l}) = \sigma_t^\lambda \sigma_{t-l}^\lambda \omega_l$ .  
Si  $\sigma_{\varepsilon_m}^2 = 0$ , la sèrie anual de referència  $a_m$  no conté error de manera que  
 $a_m = \sum_{t=t_{1m}}^{t_{12m}} j_{mt} \hat{\theta}_t$ .

La sèrie sub-anual observada  $s_t$  és un estimador imprecís de  $\theta_t$  i es veu corromput per una sèrie de biaixos deterministes i un error autocorrelacionat  $e_t$ . El biaix, normalment és una constant, de manera que  $H = 1, r_{t1} = 1$  i

$$s_t = \beta_1 + \theta_t + e_t \quad t = 1, \dots, T.$$

o  $s_t - \beta_1 = \theta_t + e_t$ ,<sup>7</sup> o, incloent-hi una tendència,  $r_{t2} = t, s_t - \beta_1 - \beta_2 t = \theta_t + e_t$ . Així, per exemple, en el cas d'una constant, el biaix  $\beta_1$  és sempre el mateix, indicant que es tendeix a sobre o a subestimar.<sup>8</sup> L'expressió (3) també es pot escriure com

$$s_t = \sum_{h=1}^H r_{th} \beta_h + \theta_t + \sigma_t^\lambda e_t^\dagger \quad t = 1, \dots, T$$

on  $e_t^\dagger$  és un terme d'error estandaritzat, de mitjana nul·la i variància unitària,  $\omega_l$  són les autocorrelacions dels errors estandaritzats  $e_t^\dagger$ . El paràmetre  $\lambda$  pot prendre els valors  $\lambda = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ . Si  $\lambda = 0$ , el terme d'error  $e_t$  és homocedàstic; quan  $\lambda = \frac{1}{2}$ , el terme d'error  $e_t$  és proporcional a  $\sigma_t$  i per a  $\lambda = 1$ ,  $e_t$  és proporcional a  $\sigma_t^2$ . Aquest model és adequat quan  $\sigma_t$  és independent del nivell de  $s_t$ .

El terme d'error  $e_t$  juga un paper crític a benchmarking. La forma que es triï determina en gran mesura com es distribueixen les discrepàncies anuals  $d_m$  entre les observacions subanuals  $s_t$ . L'estructura d'autocorrelacions dels errors estandaritzats  $\omega_l$  que s'empra sol ser un ARMA estacionari i invertible, normalment un AR(1) o un AR(2). Més a baix, en considerar l'estimació del model, es donen més detalls.

**Example 1** *Per al cas particular en què  $s_t$  sigui un indicador sintètic mensual de la magnitud de referència anual  $a_m$ , aquesta darrera sense error, l'expressió (4) es reduiria a*

$$a_m = \sum_{t=t_{1m}}^{t_{12m}} \theta_t \quad m = 1, \dots, M.$$

*En canvi, si  $a_m$  és la taxa de creixement anual de la magnitud d'interès, l'expressió anterior ens diu que és la suma de les taxes intermensuals, expressió que es correcta amb taxes naturals de creixement. Altrament, la relació només seria aproximada amb  $\sigma_{\varepsilon_m}^2 > 0$ . Si  $\hat{\theta}_t$ , per comptes d'intermensuals, són taxes*

<sup>7</sup> Altrament,  $E(s_t) = \beta_1 + \theta_t$  i  $\beta_1 = E(s_t) - \theta_t$ .

<sup>8</sup> El model multiplicatiu sí que permet que el biaix sigui proporcional a  $\theta_t$ . Així mateix, el model es pot tornar multiplicatiu escrivint (3) per  $H = 1$  com

$$0 = -\beta_1 s_t + \theta_t + e_t \quad t = 1, \dots, T$$

però presenta problemes d'estimació (Dagum i Cholette, 2006, p. 61)

interanuals, aleshores cal que

$$a_m \simeq \frac{1}{12} \sum_{t=t_{1m}}^{t_{12m}} \theta_t \quad m = 1, \dots, M,$$

tot i que també es podria assumir que

$$a_m = \theta_{t_{12m}} \quad m = 1, \dots, M,$$

amb un tractament similar al d'una magnitud stock.

Així mateix, si  $a_m$  és un índex de volum, aleshores

$$a_m = \frac{1}{12} \sum_{t=t_{1m}}^{t_{12m}} \theta_t \quad m = 1, \dots, M.$$

Amb vista a estimar el model, és millor representar-lo en forma matricial. Així, (3) i (4) es poden escriure com

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \quad (5)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{J}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

on  $E(\mathbf{e}) = 0$ ,  $E(\mathbf{e}\mathbf{e}') = \mathbf{V}_e$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \mathbf{V}_\varepsilon$ ,  $E(\mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon}') = 0$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_T)'$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_T)'$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_M)'$ . La matriu  $\mathbf{J}$  és un operador de suma temporal de dimensions  $M \times T$ . Si  $s_t$  es una variable flux de periodicitat mensual, aleshores

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{12} & \mathbf{0}_{12} & \cdots \\ \mathbf{0}_{12} & \mathbf{1}_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{1}_{12} \end{aligned}$$

on  $\mathbf{1}_{12} = (1, \dots, 1)$  i  $\mathbf{0}_{12} = (0, \dots, 0)$ . Per a una variable stock mesurada el darrer dia de cada any aleshores

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{1}_{12}^*$$

on  $\mathbf{1}_{12}^* = (0, \dots, 0, 1)$ , i per a índexos de volum  $\mathbf{1}_{12}^* = (1/12, \dots, 1/12)$ .

Notem que el model permet considerar el cas en què només es disposi de determinats valors de l'agregat anual i que aquests estiguin separats en el temps. El següent exemple ho mostra.

**Example 2** *Es disposa dels valors  $a_{04}$  i  $a_{14}$  mentre que la sèrie subanual  $\mathbf{s}$  cobreix els anys 04 fins a 19. En aquest cas, la matriu  $\mathbf{J}$  tindria blocs d'elements no nuls a la diagonal principal només en els blocs corresponents als anys 4 i 14.*

Una manera alternativa d'escriure (5) i (6) és

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I}_T \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}$$



o bé,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{u}$$

on  $\mathbf{y} = (\mathbf{s}', \mathbf{a}')'$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\theta}')'$ ,  $\mathbf{u} = (\mathbf{e}', \boldsymbol{\varepsilon}')'$ ,  $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \mathbf{V}_u = \text{bloc}(\mathbf{V}_e, \mathbf{V}_\varepsilon)$  i

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I}_T \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{pmatrix},$$

i que té forma de model de regressió estàndard. Els estimadors per MQG són

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\alpha}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix}, \\ V(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) & \text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ \text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) & V(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que només és possible si  $\mathbf{V}_u$  és invertible, cosa que requereix que ho siguin  $\mathbf{V}_e$  i  $\mathbf{V}_\varepsilon$ . Per tant, els elements de la diagonal principal de  $\mathbf{V}_\varepsilon$  han de ser majors a zero i les restriccions no poden ser constrenyents. És a dir,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . En el cas en què s'imposa benchmark (restriccions constrenyents), això és  $\mathbf{V}_\varepsilon = 0$ , Dagum i Cholette (2006, p. 369...), mostren que els paràmetres del model es poden estimar per mínims quadrats generalitzats restringits, donant lloc a:<sup>9</sup>

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = -(\mathbf{R}'\mathbf{J}'\mathbf{V}_d^{-1}\mathbf{J}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}'\mathbf{J}'\mathbf{V}_d^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{J}\mathbf{s}) \quad (7)$$

$$V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{R}'\mathbf{J}'\mathbf{V}_d^{-1}\mathbf{J}\mathbf{R})^{-1} \quad (8)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{s} + \mathbf{V}_e\mathbf{J}'\mathbf{V}_d^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{J}\mathbf{s}) \quad (9)$$

$$V(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_e\mathbf{J}'\mathbf{V}_d^{-1}\mathbf{J}\mathbf{V}_e + \mathbf{W}V(\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{W}' \quad (10)$$

on  $\mathbf{W} = \mathbf{R} - \mathbf{V}_e\mathbf{J}'\mathbf{V}_d^{-1}\mathbf{J}\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{V}_d = \mathbf{J}\mathbf{V}_e\mathbf{J}' + \mathbf{V}_\varepsilon$  i  $\mathbf{V}_d$  és invertible si  $\mathbf{J}\mathbf{V}_e\mathbf{J}'$  ho és. Els residus venen donats per

$$\hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{s} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{s}^\dagger - \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{V}_e\mathbf{J}'\mathbf{V}_d^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{J}\mathbf{s})$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{a} - \mathbf{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Notem que el model té pocs graus de llibertat atès que s'han d'estimar  $T+H$  paràmetres a partir de  $T+M$  observacions, de manera que només té  $M-H$  graus de llibertat, és a dir, el nombre d'anys manco el nombre de paràmetres del terme de biaix. Així per exemple, si hi ha un terme de biaix i es disposa de 15 anys, es disposarà de 14 graus de llibertat. De fet, com més restriccions (de

<sup>9</sup>Originalment, l'equació (9) era (expressió (3.20c) de Dagum i Cholette, 2006, p. 73)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{s}^\dagger + \mathbf{V}_e\mathbf{J}'\mathbf{V}_d^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{J}\mathbf{s}),$$

on  $\mathbf{s}^\dagger = \mathbf{s} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}$  és la sèrie subanual sense biaix. No obstant, formulació dona lloc a què  $\mathbf{J}\hat{\boldsymbol{\theta}} \neq \mathbf{a}$ .

suma anual) es disposa, més graus de llibertat. Més endavant, en considerar la reconciliació es veurà que la introducció de restriccions creuades augmenta considerablement els graus de llibertat.

En absència de termes deterministes,  $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = 0$  a (5), aleshores

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{s} + \mathbf{V}_e \mathbf{J}' \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{a} - \mathbf{J}\mathbf{s}) \\ V(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_e \mathbf{J}' \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{J} \mathbf{V}_e\end{aligned}$$

i  $V(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) < \mathbf{V}_e$ . En canvi, si hi ha termes deterministes  $V(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \leq \mathbf{V}_e$ .

Si les variàncies de  $\mathbf{e}$ , i  $\boldsymbol{\varepsilon}$  són desconegudes, el model s'ha d'estimar iterativament. En canvi, la matriu  $\mathbf{V}_e$  associada a les observacions subanuals podria ser obtinguda d'un model estadístic d'extracció de senyals. Una altra possibilitat és fer suposicions sobre

$$\mathbf{V}_e = \boldsymbol{\Xi}^\lambda \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Xi}^\lambda \quad (11)$$

on  $\boldsymbol{\Xi}$  és una matriu diagonal amb les desviacions estàndard assumides per a  $\mathbf{e}$  i  $\boldsymbol{\Omega}$  recull l'estructura d'autocorrelacions, normalment un AR(1) o un AR(2). A la pràctica Dagum i Cholette (2006, p. 93) suggereixen el valor del paràmetre AR(1) que estigui a l'interval  $0.7 \leq \varphi \leq 0.90$  per a sèries mensuals i de  $0.7^3 \leq \varphi \leq 0.90^3$  per a dades trimestrals. El valor  $\varphi = 0.9$  sol donar bons resultats. Per al model AR(2) suggereixen  $(1 - \varphi L)(1 - \varphi L)$  amb valors de  $\varphi$  com els del model AR(1). Desaconsellen models MA atès que tendeixen a produir bots entre anys, cosa que els fa inadequats per a sèries flux.

**Remark 3** *El mètode d'interpolació i distribució temporal de Chow-Lin (1971), que es mostra a l'apèndix, dona lloc a unes sèries distribuïdes*

$$\widehat{\mathbf{z}} = X\widehat{\boldsymbol{\beta}} + B(\mathbf{y} - CX\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

on  $B \equiv VC'(CVC')^{-1}$ , en la notació de l'apèndix. Aquest mètode és cas particular del mètode de Cholette-Dagum. En, efecte fent  $\mathbf{V}_\varepsilon = 0$ ,  $\mathbf{s} = 0$ , i canviant a (9) i (10)  $\mathbf{R}$  per  $-\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{J}$  per  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{V}_e$  per  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}_d$  per  $\mathbf{CVC}'$ ,  $\boldsymbol{\theta}$  per  $\mathbf{y}$ .

**Remark 4** *Com es dedueix de la consideració anterior, el conjunt de regressors  $\mathbf{R}$  de l'equació (5) es pot generalitzar a incloure altres regressors addicionals com a Chow-Lin.*

## 5.2.2 Model multiplicatiu

Com s'han comentat, el model additiu de benchmark és adequat quan  $\sigma_t$  és independent del nivell de  $s_t$ . Si  $\sigma_t$  és proporcional al nivell de  $s_t$ , aleshores el model multiplicatiu és més adequat. En aquest cas l'equació de la sèrie subanual (3) estevé ara

$$\begin{aligned}s_t &= \widehat{b}_t \times \theta_t \times e_t = b_t \times \theta_t \times (1 + e_t^*) \\ &= b_t \times \theta_t \times \left(1 + c_t e_t^\dagger\right)\end{aligned}$$

on  $b_t = \prod_{h=1}^H \beta_h^{r_{th}}$  és la part determinista, el terme d'error  $e_t$  està centrat a 1 i igual a  $1 + e_t^* = 1 + c_t e_t^\dagger$ ,  $e_t^* = c_t e_t^\dagger$  és una desviació respecte de 1 i propera a zero,  $e_t^\dagger$  és l'error estandaritzat,  $c_t$  és la desviació estàndard de  $e_t^*$ ,  $E(e_t^*) = 0$  i  $E(e_t^* e_{t-l}^*) = c_t^\lambda c_{t-l}^\lambda \omega_l$ . Prenent logaritmes

$$\begin{aligned} \ln s_t &= \ln b_t + \ln \theta_t + \ln(1 + e_t^*) \\ &\simeq \ln b_t + \ln \theta_t + e_t^* \end{aligned}$$

en definitiva

$$s_t^* = \sum_{h=1}^H r_{th} \beta_h^* + \theta_t^* + e_t^*$$

on  $s_t^* = \ln s_t$ ,  $\beta_h^* = \ln \beta_h$ ,  $\theta_t^* = \ln \theta_t$ . La segona equació és la mateixa que per el model additiu i ve donada per (4)

$$a_m = \sum_{t=t_{1m}}^{t_{Lm}} j_{mt} \theta_t + \varepsilon_m \quad m = 1, \dots, M.$$

El model requereix que tant  $s_t$  com  $a_m$  siguin positives. Per tant, per a taxes de creixement no seria adequat.

### 5.3 El model de regressió dinàmic generalitzat de Dagum, Cholette i Chen

Dagum, Cholette i Chen (1998) proposaren un model de regressió estocàstic dinàmic generalitzat que proporciona una visió unificada de l'extracció de senyals amb models ARIMA, el benchmarking, la interpolació i la distribució temporal. El model consisteix en el següent sistema d'equacions:

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{e} \quad (12)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{J}\mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{J}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\nu} \quad (14)$$

on  $E(\mathbf{e}) = 0$ ,  $E(\mathbf{e}\mathbf{e}') = \mathbf{V}_e$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \mathbf{V}_\varepsilon$ ,  $E(\boldsymbol{\nu}) = 0$ ,  $V(\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{V}_\nu$ ,  $E(\mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon}') = 0$ ,  $E(\mathbf{e}\boldsymbol{\nu}') = 0$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\nu}') = 0$ . L'equació (12) indica que les observacions d'alta freqüència subanuals del senyal  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\eta}$  estan contaminades per biaix ( $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}$ ) i autocorrelació ( $\mathbf{e}$ ). Aquest senyal conté una part determinista ( $\mathbf{Z}\boldsymbol{\delta}$ ) una estocàstica  $\boldsymbol{\eta}$ . La determinista captura variacions de calendari o estacionals a  $\mathbf{s}$ . També pot contenir regressors relacionats amb  $\mathbf{s}$  i  $\mathbf{a}$  com a Chow i Lin (1971). La matriu  $\mathbf{D}$  és una matriu de diferenciació que transforma  $\boldsymbol{\eta}$  en estacionari. Per exemple, si  $\eta_t$  necessita una diferència regular per esdevenir estacionari, aleshores

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{(T-1) \times T},$$

si en necessita dues

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{(T-2) \times T},$$

si li cal una diferència estacional en dades trimestrals

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{(T-4) \times T},$$

i si li cal cuna diferència regular i una estacional

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{(T-5) \times T}.$$

El model (12)-(14) es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{Z} & \mathbf{I}_T \\ \mathbf{0} & \mathbf{JZ} & \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\nu} \end{pmatrix}$$

o bé,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{u}$$

on  $\mathbf{y} = (\mathbf{s}', \mathbf{a}', \mathbf{0}')$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\eta}')$ ,  $\mathbf{u} = (\mathbf{e}', \boldsymbol{\varepsilon}', -\boldsymbol{\nu}')$ ,  $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \mathbf{V}_u = \text{bloc}(\mathbf{V}_e, \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\nu)$  i

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{Z} & \mathbf{I}_T \\ \mathbf{0} & \mathbf{JZ} & \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}.$$

Dagum, Cholette i Chen (1998) mostren que l'estimador MQG del model anterior ve donat per

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{y} \quad (15)$$

$$V(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{X})^{-1}. \quad (16)$$

Atès que alguns dels elements de  $\boldsymbol{\alpha}$  són variables aleatòries, més que paràmetres, aquests estimadors són BLUP (Best Lineal Unbiased Predictions). Els estimadors del senyal bechmarked ( $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\eta}$ ) i de la seva matriu de variàncies i convariàncies són:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{X}^\dagger \hat{\boldsymbol{\alpha}} \\ V(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathbf{X}^\dagger V(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \mathbf{X}^{\dagger'}. \end{aligned}$$

on  $\mathbf{X}^\dagger = (\mathbf{0}_{T \times H}, \mathbf{Z}, \mathbf{I}_T)$ .

És important tenir en compte que l'extracció de senyals, ço és, l'estimació de  $\boldsymbol{\eta}$ , por ser duta a terme en una primera etapa i, posteriorment, aplicar el model anterior per a bechmarking. El bechmarking amb extracció de senyals considerat en aquest model redueix els errors d'estimació respecte a la situació de benchmarking sense extracció considerada a la secció anterior.

En el cas en què es necessitin valors subanuals per a tots els períodes, però no es disposi d'observaciones de  $\mathbf{s}$  i només d'alguns valors de  $\mathbf{a}$ , com podria ser el cas del PIB turístic, aleshores el model es redueix a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{JZ} & \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\nu} \end{pmatrix},$$

amb  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\eta}$  i  $\mathbf{s} = \mathbf{J}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ . Normalment,  $\mathbf{V}_\varepsilon$  tendeix a zero. De nou, els estimadors MQG venen donats per (15) i (16) amb  $\mathbf{X}^\dagger = (\mathbf{Z}, \mathbf{I}_T)$ . Per a poder estimar aquest model particular cal que es compleixi un conjunt de restriccions (vegeu Dagum i Cholette, 2006, pág 243).

## 5.4 Reconciliació

En aquesta secció considerarem el problema de la reconciliació. Aquest sorgeix quan es disposa de sèries desagregades, tant sectorialment ( $i = 1, \dots, I - 1$ ) com territorialment ( $j = 1, \dots, J - 1$ ), denotades per  $s_{i,j,t}$  (valor de variable  $s$  en el sector  $i$ , territori  $j$ , moment  $t$ ) i on  $s_{I,j,t}$  és el valor de l'agregat (de tots els sectors) en el territori  $j$  en el moment  $t$ , i  $s_{i,J,t}$  és l'agregat (de tots els territoris) del sector  $i$  en el moment  $t$ . La següent taula mostra el sistema de classificació per dues vies (sectors i territori) d'una determinada variable, on els termes  $\{s_{i,j,t}\}$ , o més pròpiament  $\{s_{i,j,t}\}_{t=1}^T$ , indiquen el conjunt de valors temporals ( $t = 1, \dots, T$ ) de la subsèrie corresponent al sector  $i$  del territori  $j$ .

Sector \ territori	1	2	...	$J - 1$	Totals sector
1	$\{s_{1,1,t}\}$	$\{s_{1,2,t}\}$	...	$\{s_{1,J-1,t}\}$	$\{s_{1,J,t}\}$
2	$\{s_{2,1,t}\}$	$\{s_{2,2,t}\}$	...	$\{s_{2,J-1,t}\}$	$\{s_{2,J,t}\}$
...	...	...	...	...	...
$I - 1$	$\{s_{I-1,1,t}\}$	$\{s_{I-1,2,t}\}$	...	$\{s_{I-1,J-1,t}\}$	$\{s_{I-1,J,t}\}$
Totals territori	$\{s_{I,1,t}\}$	$\{s_{I,2,t}\}$	...	$\{s_{I,J-1,t}\}$	$\{s_{I,J,t}\}$

D'altra banda, s'han de satisfer les restriccions creuades:

$$s_{I,j,t} = \sum_{i=1}^{I-1} s_{i,j,t}, \quad \text{per a } j = 1, \dots, J \text{ i } t = 1, \dots, T$$

$$s_{i,J,t} = \sum_{j=1}^{J-1} s_{i,j,t}, \quad \text{per a } i = 1, \dots, I \text{ i } t = 1, \dots, T.$$

El problema sorgeix quan les sèries  $s_{I,j,t}$  i  $s_{i,J,t}$  s'obtenen no com a suma de les subseries desagregades sinó per altres procediments. De manera similar, el

problema també apareix quant, tot i que  $s_{.,j,t}$  i  $s_{i,.,t}$  sí s'obtenen com a suma de les subseries desagregades, totes les sèries es desestacionalitzen i les sèries desestacionalitzades dels agregats ja no coincideixen amb les sumes de les sèries desagregades desestacionalitzades. Notem que el nombre total de restriccions és  $(I + J)T$ . Així, per 4 territoris, 5 sectors i 100 observacions temporals de cada sèrie, hi ha 900 restriccions.

Les discrepàncies territorials i sectorials venen donades, respectivament, per:

$$d_{j,t} = s_{I,j,t} - \sum_{i=1}^{I-1} s_{i,j,t}, \quad \text{per a } j = 1, \dots, J \text{ i } t = 1, \dots, T$$

$$d_{i,t} = s_{i,J,t} - \sum_{j=1}^{J-1} s_{i,j,t}, \quad \text{per a } i = 1, \dots, I \text{ i } t = 1, \dots, T,$$

sovint expressades en termes proporcionals

$$d_{j,t}^{(p)} = \frac{s_{I,j,t}}{\sum_{i=1}^{I-1} s_{i,j,t}}, \quad \text{per a } j = 1, \dots, J \text{ i } t = 1, \dots, T$$

$$d_{i,t}^{(p)} = \frac{s_{i,J,t}}{\sum_{j=1}^{J-1} s_{i,j,t}}, \quad \text{per a } i = 1, \dots, I \text{ i } t = 1, \dots, T,$$

El problema de reconciliació pot ser de tres tipus: 1) el d'una via, per exemple, territorial o sectorial; 2) el de dues vies, on s'aborda tant la conciliació sectorial com la territorial; i 3) el marginal de dues vies, en la reconciliació només es duu a terme en les sèries marginals  $s_{.,j,t}$  i  $s_{i,.,t}$ . Aquest darrer és el que ens enfrontam en el present treball. Tradicionalment, els mètodes de reconciliació s'han basat en distribuir les discrepàncies entre les sèries individuals. Entre aquests mètodes es poden citar: 1) el "raking" o Ajust Proporcional Iteratiu (Iterative Proportional Fitting); 2) el RAS, desenvolupat per Bacharach (1965, 1971) i molt emprat en ajustar marcs input-output; o 3) el mètode basat en regressió generalitzada, que és emprat majoritàriament per agències oficials d'estadística i que serà el que considerarem aquí.<sup>10</sup>

#### 5.4.1 Mètode de reconciliació basat en regressió generalitzada

Aquest mètode va ser proposat per Weale (1988) i Solomou i Weale (1993). El model de regressió ve donat per les dues següents equacions

$$\mathbf{s} = \mathbf{I}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \quad (17)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{G}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (18)$$

on  $E(\mathbf{e}) = 0$ ,  $E(\mathbf{e}\mathbf{e}') = \mathbf{V}_e$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \mathbf{V}_\varepsilon$ ,  $E(\mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon}') = 0$ ,  $\mathbf{s} = (\mathbf{s}'_1, \dots, \mathbf{s}'_K)'$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}'_1, \dots, \boldsymbol{\theta}'_K)'$ ,  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_K)'$ . El vector  $\mathbf{s}$  conté les  $K$  sèries a reconciliar, incloent-hi els totals marginals. El vector  $\boldsymbol{\theta}$  conté les  $K$  sèries "vertaderes" d'interès, incloent-hi els totals marginals, i es tracta de les sèries reconciliades.

<sup>10</sup>Dagum i Cholette (2006) pàg. 267.

La matriu  $\mathbf{G}$  és l'operador de suma de secció creuada (cross-sectional sum operator), i consisteix en valors 0, 1 i -1. Més endavant es donaran més detalls sobre aquesta matriu. El vector  $\mathbf{g}$  normalment és un vector de zeros, atès que totes les sèries (inclosos els totals) s'han d'estimar. La matriu  $\mathbf{V}_\varepsilon$  és diagonal, mentre que  $\mathbf{V}_e$  és diagonal per blocks,  $\mathbf{V}_e = \text{bloc}(\mathbf{V}_{e_1}, \dots, \mathbf{V}_{e_K})$ . L'expressió (17) ens indica que les sèries "vertaderes" s'observen amb error, mentre que (18) formalitza les restriccions d'agregació creuada. El model (17)-(18) també es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta} + \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

o bé,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{u}$$

on  $\mathbf{y} = (\mathbf{s}', \mathbf{g}')'$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\theta}')'$ ,  $\mathbf{u} = (\mathbf{e}', \boldsymbol{\varepsilon}')'$ ,  $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \mathbf{V}_u = \text{bloc}(\mathbf{V}_e, \mathbf{V}_\varepsilon)$  i  $\mathbf{X} = (\mathbf{I}, \mathbf{G})'$ . La solució per MQG ve donada per

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{y} \\ V(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{X})^{-1}, \end{aligned}$$

que requereix que  $\mathbf{V}_e$  i  $\mathbf{V}_\varepsilon$  siguin invertibles. Això implica que els elements de la diagonal principal de  $\mathbf{V}_\varepsilon$  han de ser majors a 0 i, per tant, que les restriccions d'agregació creuada no s'han de verificar. En tot cas, sota  $\mathbf{V}_\varepsilon = 0$ , Dagum i Cholette (2006, apèndix B) mostren que la solució del problema es pot escriure com:<sup>11</sup>

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{s} + \mathbf{V}_e \mathbf{G}' \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{s}) \quad (19)$$

$$V(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_e \mathbf{G}' \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{G} \mathbf{V}_e \quad (20)$$

on  $\mathbf{V}_d = \mathbf{G}\mathbf{V}_e\mathbf{G}' + \mathbf{V}_\varepsilon$ . La dimensió de la matriu quadrada  $\mathbf{V}_d$  ve donada pel nombre de restriccions:  $(I + J)T$ .

Quant a les matrius  $\mathbf{V}_{e_i}$ , per a aquesta s'imposa una descomposició similar a (11)

$$\mathbf{V}_{e_i} = \alpha_i \boldsymbol{\Xi}_i^\lambda \boldsymbol{\Omega}_i \boldsymbol{\Xi}_i^\lambda \quad (21)$$

on  $\boldsymbol{\Xi}_i$  és una matriu diagonal amb les desviacions estàndard assumides d' $\mathbf{e}_i$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_i$  recull l'estructura d'autocorrelacions i  $\alpha_i$  és un coeficient d'alterabilitat de la sèrie  $i$ -èsima. Els coeficients d'alterabilitat amplien o redueixen artificialment les matrius de covariàncies de les sèries, de manera que aquestes sèries estan més o manco afectades per la reconciliació. Si  $\alpha_i = 0$ , la sèrie  $i$ -èsima no es veu "alterada" per la reconciliació. En canvi, assignar valors elevats a  $\alpha_i$  donarà lloc a què la sèrie  $i$ -èsima es vegi afectada en major mesura que la resta de sèries.

El nombre de paràmetres del model a estimar és  $I \times J \times T$ , mentre que els graus de llibertat coincideixen amb el nombre de restriccions,  $(I + J)T$ .

<sup>11</sup>Notem que el terme  $(\mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{s})$  de l'expressió de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  és, precisament, les discrepàncies en les restriccions i que l'estimador és, de fet, el de MQG restringit.

Així, per exemple, en el cas de 4 sectors i l'agregat ( $I = 5$ ), 3 desagregacions territorials i l'agregat ( $J = 4$ ) i  $T = 10$  anys, el nombre de paràmetres és 200 i els graus de llibertat 90. Amb dades mensuals, si  $T = 120$  mesos, aleshores hi hauria 2400 paràmetres i 1080 graus de llibertat. La relació entre graus de llibertat i paràmetres a estimar és, doncs,  $(I + J) / (IJ) = J^{-1} + I^{-1}$ .

En els següents apartats considerarem els 3 casos particulars del model: 1) el d'una via; 2) el dels marginals de dues vies; i 3) el de dues vies.

#### 5.4.2 Reconciliació per una via

En aquest cas, el conjunt de restriccions creuades és

$$s_{I,t} = \sum_{i=1}^{I-1} s_{i,t}, \quad \text{per } t = 1, \dots, T$$

amb discrepàncies

$$d_t = s_{I,t} - \sum_{i=1}^{I-1} s_{i,t}, \quad \text{per a } t = 1, \dots, T,$$

$$d_t^{(p)} = \frac{s_{I,t}}{\sum_{i=1}^{I-1} s_{i,t}}, \quad \text{per a } t = 1, \dots, T.$$

En aquesta situació, se sol aplicar el mètode "raking" o Ajust Proporcional Iteratiu, que consisteix en multiplicar les sèries elementals  $s_{i,t}$  per  $d_t^{(p)}$ . Així, les noves sèries són  $s_{i,t}^\dagger = s_{i,t} d_t^{(p)}$ , i es verifica d'una banda que  $s_{I,t}^\dagger = d_t^{(p)} s_{I,t}$  i d'una altra que  $\sum_{i=1}^{I-1} s_{i,t}^\dagger = d_t^{(p)} \sum_{i=1}^{I-1} s_{i,t} = d_t^{(p)} s_{I,t}$ , de manera que

$$d_t^{(p)\dagger} \equiv \frac{s_{I,t}^\dagger}{\sum_{i=1}^{I-1} s_{i,t}^\dagger} = 1 \quad \text{per a } t = 1, \dots, T.$$

L'expressió (17) en aquest cas queda de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{T_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{T_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{T_I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_I \end{pmatrix}$$

on  $\mathbf{I}_{T_i}$  és una matriu identitat de dimensió  $T_i \times T_i$ , mentre que (18) quedaria com

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & -\mathbf{G}_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_I \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

on  $\mathbf{G}_i$  són matrius de selecció, generalment matrius identitat amb  $T_i$  files i  $T_i \leq T_I$  columnes, on les columnes que manquen corresponen als períodes pels



quals no es disposa d'informació de la sèrie  $i$ -èssima.  $\mathbf{g}$  sol se un vector  $T_I \times 1$  de zeros. Si totes les sèries són de la mateixa longitud, aleshores el model queda com

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \mathbf{I}_I \otimes \mathbf{I}_T \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \\ \mathbf{g} &= \boldsymbol{\iota} \otimes \mathbf{I}_T \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}$$

on  $\otimes$  és el producte de Kronecker i  $\boldsymbol{\iota} = (1, \dots, 1, -1)$  és un vector  $1 \times I$ .

Les expressions dels estimadors (19) i (20) queden com:

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{L}'_1 \\ \mathbf{L}'_2 \\ \vdots \\ -\mathbf{L}'_I \end{pmatrix} \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{d}$$

on  $\mathbf{d} = \mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{s}$  són els discrepàncies,  $\mathbf{L}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{V}_{e_i}$ ,

$$V(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{e_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{e_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{V}_{e_I} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \cdots & -\mathbf{E}_{1I} \\ \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \cdots & -\mathbf{E}_{2I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{E}_{I1} & -\mathbf{E}_{I2} & \cdots & +\mathbf{E}_{II} \end{pmatrix}$$

i  $\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{L}'_i \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{L}_j = \mathbf{V}_{e_i} \mathbf{G}'_i \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{G}_j \mathbf{V}_{e_j}$ . Per tant,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \mathbf{s}_i + \delta_{iI} \mathbf{V}_{e_i} \mathbf{G}'_i \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{d}$$

on  $\delta_{iI} = 1$  per a  $i \neq I$  i  $\delta_{iI} = -1$  per a  $i = I$ , a la vegada que

$$\begin{aligned}V(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) &= \mathbf{V}_{e_i} - \mathbf{V}_{e_i} \mathbf{G}'_i \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{G}_i \mathbf{V}_{e_i} \\ cov(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_j) &= -\delta_{iI} \delta_{jI} \mathbf{V}_{e_i} \mathbf{G}'_i \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{G}_j \mathbf{V}_{e_j}\end{aligned}$$

per a  $i = 1, \dots, I$ .

Qualsevol de les  $i = 1, \dots, I$  sèries, el total  $i = I$  en particular, es pot fer exògena, és a dir, predeterminada, fent  $\mathbf{V}_{e_i} = \mathbf{0}$ . Alternativament, es pot fixar en el vector  $\mathbf{g}$  i calcular  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$  i  $V(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)$  només per a  $i = 1, \dots, I - 1$ .

D'altra banda, si les sèries tenen un benchmark anual, aleshores, hi ha una restricció creuada redundant per any (o bé una restricció temporal anual redundant). Aquest problema de redundància sol·licionar-se de diverses maneres: 1) es pot eliminar una restricció creuada per any amb benchmark; 2) fer que una de les restriccions creuada per any no sigui "binding" fent que el corresponent  $\mathbf{V}_\varepsilon$  sigui no nul; 3) fer que una de les restriccions temporal sigui non-binding per les sèries; 4) invertir  $\mathbf{V}_d$  per Moore-Penrose.

**Example 5** *Suposem que hi ha 2 sectors i el total ( $I = 3$ ), 2 períodes dins un any ( $T = 2$ ), de manera que les restriccions a verificar són*

$$\theta_{3,t} = \sum_{i=1}^2 \theta_{i,t}, \quad \text{per a } t = 1, 2.$$

*D'altra banda, si s'imposen restriccions de suma anual, aleshores s'ha de verificar*

$$a_i = \sum_{t=1}^2 \theta_{i,t} \quad \text{per a } i = 1, 2, 3.$$

*És a dir,*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{1,1} \\ \theta_{1,2} \\ \theta_{2,1} \\ \theta_{2,2} \\ \theta_{3,1} \\ \theta_{3,2} \end{pmatrix}$$

*o bé, matricialment*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}\boldsymbol{\theta},$$

*on  $\mathbf{F} = (\mathbf{G}', \mathbf{J}')$ . Notem que  $\text{rang}(\mathbf{F}) = 4$ , atès que, per exemple, la primera fila es pot escriure com la tercera, més la quarta, menys la quinta, menys la segona. Per tant, hi ha una fila o restricció, redundant.*

**Example 6** *Si per compte de dos períodes per any n'hi hagués 3, la matriu  $\mathbf{F}$  de l'exemple anterior tindria l'estructura següent:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{1,1} \\ \theta_{1,2} \\ \theta_{1,3} \\ \theta_{2,1} \\ \theta_{2,2} \\ \theta_{2,3} \\ \theta_{3,1} \\ \theta_{3,2} \\ \theta_{3,3} \end{pmatrix},$$

*on de nou, hi ha una fila redundant a  $\mathbf{F}$ : la primera és la suma de la 4<sup>a</sup> més la 5<sup>a</sup> menys 6<sup>a</sup> menys 2<sup>a</sup> menys 3<sup>a</sup>.*

**Example 7** *Restriccions en forma de suma ponderada. També és possible considerar restriccions de tipus*

$$s_{I,t} = \sum_{i=1}^{I-1} w_i s_{i,t}, \quad \text{per a } t = 1, \dots, T,$$

amb  $\sum_{i=1}^{I-1} w_i = 1$ . En aquest cas,  $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, -\mathbf{G}_I)$  i  $\mathbf{G}_i = w_i \mathbf{I}$  per a  $i = 1, \dots, I-1$  i  $\mathbf{G}_I = \mathbf{I}$ . Altrament,  $\mathbf{G} = \mathbf{w} \otimes \mathbf{I}_T \boldsymbol{\theta}$  on  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{I-1}, -1)$ .

### 5.4.3 Reconciliació de marginals a sistemes classificats per dues vies

Aquest mètode se sol emprar quan només els dos marginals són prou acurats per publicar-se, no així les subseries. És a dir, més que en les sèries  $\{s_{i,j,t}\}_{t=1}^T$  per a  $i = 1, \dots, I-1$  i  $j = 1, \dots, J-1$ , s'està interessat en els marginals  $\{s_{i,J,t}\}_{t=1}^T$  per a  $i = 1, \dots, I-1$  i  $\{s_{I,j,t}\}_{t=1}^T$  per a  $j = 1, \dots, J-1$ . En aquest cas, només hi ha un conjunt de restriccions creuades sectorials i un altre de territorials:

$$s_{I,J,t} = \sum_{i=1}^{I-1} s_{i,J,t}, \quad \text{per a } t = 1, \dots, T,$$

$$s_{I,J,t} = \sum_{j=1}^{J-1} s_{I,j,t}, \quad \text{per a } t = 1, \dots, T,$$

amb discrepàncies proporcionals

$$d_{J,t}^{(p)} = \frac{s_{I,J,t}}{\sum_{i=1}^{I-1} s_{i,J,t}}, \quad \text{per a } t = 1, \dots, T,$$

$$d_{I,t}^{(p)} = \frac{s_{I,J,t}}{\sum_{j=1}^{J-1} s_{I,j,t}}, \quad \text{per a } t = 1, \dots, T.$$

El mètode "raking" o Ajust Proporcional Iteratiu es pot aplicar a cadascun dels marginal iterativament fins que les discrepàncies proporcionals siguin prou pròximes a 1. Aquest mètode tracta com a exegen a  $s_{I,J,t}$ . Un mètode més general i flexible es pot obtenir a partir del mètode de reconciliació basat en regressió generalitzada, donat per les expressions (17)-(18), que es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_{I,1} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{I,J-1} \\ \mathbf{s}_{1,J} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{I-1,J} \\ \mathbf{s}_{I,J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{T,I,1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{T,I,J-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{T,1,J} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{T,I-1,J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{T,I,J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{I,1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{I,J-1} \\ \boldsymbol{\theta}_{1,J} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{I-1,J} \\ \boldsymbol{\theta}_{I,J} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{I,1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{I,J-1} \\ \mathbf{e}_{1,J} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{I-1,J} \\ \mathbf{e}_{I,J} \end{pmatrix}$$

on  $E(\mathbf{e}_{i,j}) = 0$ ,  $E(\mathbf{e}_{i,j} \mathbf{e}_{i,j}') = \mathbf{V}_{\mathbf{e}_{i,j}}$ ,  $E(\mathbf{e}_{i,j} \mathbf{e}_{n,p}') = 0$  per a  $i \neq n$  i  $j \neq p$  i on

$$T_{i,j} \leq T_{I,J},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_I \\ \mathbf{g}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{I,1} & \cdots & \mathbf{G}_{I,J-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{I,J} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{1,J} & \cdots & \mathbf{G}_{1,J-1} & -\mathbf{G}_{I,J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{I,1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{I,J-1} \\ \boldsymbol{\theta}_{1,J} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{I-1,J} \\ \boldsymbol{\theta}_{I,J} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_I \\ \boldsymbol{\varepsilon}_J \end{pmatrix},$$

$E(\boldsymbol{\varepsilon}_I) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_J) = 0$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_I \boldsymbol{\varepsilon}_I') = \mathbf{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}_I}$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_J \boldsymbol{\varepsilon}_J') = \mathbf{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}_J}$  i  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_I \boldsymbol{\varepsilon}_I') = \mathbf{0}$ . Les matrius  $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}_I}$  i  $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}_J}$  són diagonals i, normalment iguals a zero si les restriccions es compleixen. La darrera expressió també es pot escriure, en una notació evident, com

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_I \\ \mathbf{g}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_I \\ \mathbf{G}_J \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_I \\ \boldsymbol{\varepsilon}_J \end{pmatrix}, \quad (22)$$

on  $\mathbf{G}_I$  és l'operador suma de secció creuada sectorial i  $\mathbf{G}_J$  ho és territorial.

De nou, la solució de l'estimació del model ve donat per les expressions (19) i (20). Definint

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_d^{-1} &\equiv \begin{pmatrix} V^{II} & V^{IJ} \\ V^{IJ'} & V^{JJ} \end{pmatrix}, \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}} &\equiv \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} V^{II} & V^{IJ} \\ V^{IJ'} & V^{JJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_I \\ \mathbf{d}_J \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V^{II} \mathbf{d}_I + V^{IJ} \mathbf{d}_J \\ V^{IJ'} \mathbf{d}_I + V^{JJ} \mathbf{d}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_I \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_J \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

amb  $\mathbf{d}_I = \mathbf{g}_I - \mathbf{G}_I \mathbf{s}$  i  $\mathbf{d}_J = \mathbf{g}_J - \mathbf{G}_J \mathbf{s}$ , aleshores

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{s} + \mathbf{V}_e \mathbf{G}' \hat{\boldsymbol{\gamma}} \\ &= \mathbf{s} + \mathbf{V}_e \mathbf{G}'_I \hat{\boldsymbol{\gamma}}_I + \mathbf{V}_e \mathbf{G}'_J \hat{\boldsymbol{\gamma}}_J \end{aligned} \quad (23)$$

i

$$\begin{aligned} V(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_e \mathbf{G}' \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{G} \mathbf{V}_e \\ &= \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_e \mathbf{G}'_I \mathbf{V}^{II} \mathbf{G}_I \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_e \mathbf{G}'_J \mathbf{V}^{JJ} \mathbf{G}_J \mathbf{V}_e \\ &\quad - \mathbf{V}_e \mathbf{G}'_I \mathbf{V}^{IJ} \mathbf{G}_J \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_e \mathbf{G}'_J \mathbf{V}^{IJ'} \mathbf{G}_I \mathbf{V}_e. \end{aligned} \quad (24)$$

Com en el cas d'una via, si hi ha restriccions d'agregació temporal (benchmarking) aleshores hi ha restriccions redundants i es poden seguir les mateixes indicacions assenyalades anteriorment.

#### 5.4.4 Reconciliació de sistemes classificats per dues vies

Consideram, finalment, el cas més general de reconciliació. El mètode de reconciliació basat en regressió generalitzada –expressions (17) i (18)– es pot escriure

en aquest cas com

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_{1,1} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{1,J} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{I,1} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{I,J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{T_{1,1}} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{T_{1,J}} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{I}_{T_{I,1}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{T_{I,J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{1,1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{1,J} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{I,1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{I,J} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1,1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{1,J} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{I,1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{I,J} \end{pmatrix}$$

on  $E(\mathbf{e}_{i,j}) = 0$ ,  $E(\mathbf{e}_{i,j}\mathbf{e}_{i,j}') = \mathbf{V}_{\mathbf{e}_{i,j}}$ ,  $E(\mathbf{e}_{i,j}\mathbf{e}_{n,p}') = 0$  per a  $i \neq n$  i  $j \neq p$  i on  $T_{i,j} \leq T_{I,J}$ , mentre que l'equació de les restriccions creuades (18), es pot escriure com (22) amb

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_I &= \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{I,1} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{I,J} \end{pmatrix}, \mathbf{g}_J = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{1,J} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{I,J} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_I = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{I,1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{I,J} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_J = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1,J} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{I,J} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\theta} &= (\boldsymbol{\theta}'_{1,1}, \dots, \boldsymbol{\theta}'_{1,J}, \dots, \boldsymbol{\theta}'_{I,1}, \dots, \boldsymbol{\theta}'_{I,J})', \\ \mathbf{G}_I &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{1,1} & \mathbf{G}_{1,2} & \cdots & -\mathbf{G}_{1,J} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{2,1} & \mathbf{G}_{2,2} & \cdots & -\mathbf{G}_{2,J} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{G}_{I,1} & \mathbf{G}_{I,2} & \cdots & -\mathbf{G}_{I,J} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G}_J &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{1,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{2,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{G}_{I,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{1,2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{2,2} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{I,2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{G}_{1,J} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{G}_{2,J} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{G}_{I,J} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$E(\boldsymbol{\varepsilon}_I) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_J) = 0$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_I\boldsymbol{\varepsilon}_I') = \mathbf{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}_I}$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_J\boldsymbol{\varepsilon}_J') = \mathbf{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}_J}$  i  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_J\boldsymbol{\varepsilon}_I') = \mathbf{0}$ , i amb matrius  $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}_I}$  i  $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}_J}$  diagonals i, normalment, nul·les. Si totes les sèries tenen la mateixa longitud, aleshores

$$\mathbf{G}_I = \mathbf{I}_I \otimes (\boldsymbol{\nu}_I \otimes \mathbf{I}_T) \quad (25)$$

$$\mathbf{G}_J = \boldsymbol{\nu}_J \otimes (\mathbf{I}_J \otimes \mathbf{I}_T) \quad (26)$$

on  $\boldsymbol{\nu}_I = (1, \dots, 1, -1)$  és un vector  $1 \times I$  i  $\boldsymbol{\nu}_J = (1, \dots, 1, -1)$  és un vector  $1 \times J$ .

**Example 8** *Suposem 4 àrees territorials ( $J = 4$ ) on  $j = 4$  és l'agregat de tot el territori, i 2 sectors, amb un tercer total ( $I = 3$ ). Aleshores,  $\boldsymbol{\nu}_I = (1, 1, -1)$ ,  $\boldsymbol{\nu}_j =$*

(1, 1, 1, -1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_I &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_I \otimes \mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\nu}_I \otimes \mathbf{I}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\nu}_I \otimes \mathbf{I}_T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_T & \mathbf{I}_T & -\mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_T & \mathbf{I}_T & -\mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_T & \mathbf{I}_T & -\mathbf{I}_T \end{pmatrix}, \\
\mathbf{G}_J &= ((\mathbf{I}_J \otimes \mathbf{I}_T), (\mathbf{I}_J \otimes \mathbf{I}_T), (\mathbf{I}_J \otimes \mathbf{I}_T), -(\mathbf{I}_J \otimes \mathbf{I}_T)) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_T & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_T \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les expressions dels estimadors del model, donades per (19) i (20), es poden escriure, en aquest cas, de manera idèntica a (23) i (24) tenint en compte la nova definició dels vectors i matrius.

## 6 Apèndix 2: Mètodes d'ancorament-reconciliació d'indicadors

Aquest apèndix conté els desenvolupaments i les adaptacions necessàries dels mètodes d'ancorament i de reconciliació de Dagum i Cholette (2006) al cas de la seva aplicació a la conciliació dels indicadors parcials (territorials i sectorials) i l'ancorament a les magnituds anuals de referència.

### 6.1 Reconciliació de les sèries de VAB sectorial amb ancorament

Es disposa de sèries de VAB sectorials anuals conciliades amb el VAB agregat. Per tant, es tracta d'un problema de reconciliació dels indicadors sectorials i d'ancorament a les sèries anuals de referència, de manera que cal recórrer als desenvolupaments tant d'ancorament, com de reconciliació. En principi, el model ve donat per una combinació de (5)-(4) i (17)-(18)

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \quad (27)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{G}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_g \quad (28)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{J}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (29)$$

o bé

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{u}$$

on  $\mathbf{y} = (\mathbf{s}', \mathbf{g}', \mathbf{a}')'$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\theta}')'$ ,  $\mathbf{u} = (\mathbf{e}', \boldsymbol{\varepsilon}'_g, \boldsymbol{\varepsilon}'_a)'$ ,  $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \mathbf{V}_u = \text{bloc}(\mathbf{V}_e, \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_a)$

i

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{pmatrix}.$$

Recordem que la matriu  $\mathbf{G}$ , normalment de la forma (25), pot tenir forma de restriccions de suma ponderada:  $\mathbf{G} = \mathbf{w} \otimes \mathbf{I}_T$  on  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{T-1}, -1)$ .

Com s'ha mostrat anteriorment a l'Exemple 5, s'haurà d'eliminar una fila de  $\mathbf{J}$  o  $\mathbf{G}$  per cada any. Per tant, d'ara en endavant, suposarem que a l'expressió  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{u}$  s'han eliminats files (corresponents a  $\mathbf{a}$  o  $\mathbf{g}$ ) a  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{u}$  per evitar aquestes redundàncies i on ara  $\mathbf{y} = (\mathbf{s}', \mathbf{f})'$ ,  $\mathbf{f} = (\mathbf{g}', \mathbf{a}')'$  eliminant files redundants

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{pmatrix},$$

i  $\mathbf{F} = (\mathbf{G}', \mathbf{J})'$  amb les files redundants eliminades. La solució per MQG ve donada per

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\alpha}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{y} \\ V(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}_u^{-1}\mathbf{X})^{-1}. \end{aligned}$$

Si les restriccions són constrenyents,  $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_g = 0$  i cal recórrer als MQG restringits, donant lloc als estimadors

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = -(\mathbf{R}'\mathbf{F}'\mathbf{V}_d^{-1}\mathbf{F}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}'\mathbf{F}'\mathbf{V}_d^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{F}\mathbf{s}) \quad (30)$$

$$V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{R}'\mathbf{F}'\mathbf{V}_d^{-1}\mathbf{F}\mathbf{R})^{-1} \quad (31)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{s}^\dagger + \mathbf{V}_e\mathbf{F}'\mathbf{V}_d^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{F}\mathbf{s}) \quad (32)$$

$$V(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_e\mathbf{F}'\mathbf{V}_d^{-1}\mathbf{F}\mathbf{V}_e + \mathbf{W}V(\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{W}' \quad (33)$$

on  $\mathbf{s}^\dagger = \mathbf{s} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}$  són les sèries subanuals sense biaix,  $\mathbf{W} = \mathbf{R} - \mathbf{V}_e\mathbf{F}'\mathbf{V}_d^{-1}\mathbf{F}\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{V}_d = \mathbf{F}\mathbf{V}_e\mathbf{F}' + \mathbf{V}_f$ , on  $\mathbf{V}_f = \text{bloc}(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_a)$ .

**Exemple 9** Considerem de nou l'Exemple 5, on teníem dos sectors i un agregat ( $I=3$ ), i dades semianuals (dues observacions per any). Atès que una de les restriccions era redundant, podríem optar per eliminar la darrera, per exemple, de manera que

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad i \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 6.2 Reconciliació de les sèries d'Índex de Volum

Tot i que el model (27)-(29) és una passada, a la pràctica s'ha optat per una versió del model de reconciliació per una via, per diversos motius. En primer lloc, la funció principal del sistema d'indicadors és per al seguiment de l'evolució econòmica en termes reals, per la qual cosa les sèries a tenir en compte són els Índexos de Volum (IV) encadenats sectorials, la suma ponderada dels quals ha de coincidir amb l'IV del VAB agregat. En segon lloc, aquestes poderacions

són variables en el temps, atès que no tots els sectors creixen al mateix ritme. Finalment, la sèrie subanual de l'IV del VAB agregat s'agafa com a fixa, a la qual els indicadors parcials sectorials s'hi han de reconciliar. Així, el model de reconciliació és

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \quad (34)$$

$$\mathbf{s}_{IB} = \mathbf{F}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (35)$$

on  $\mathbf{s} = (\mathbf{s}'_1, \dots, \mathbf{s}'_{I-1})'$ , són els indicadors estimats per als IV sectorials subanuals,  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}'_1, \dots, \boldsymbol{\theta}'_{I-1})'$  són els IV sectorials subanuals inobservats,  $\mathbf{s}_{IB}$  és l'IV subanual del VAB agregat de les Illes Balears i que es dona per exogen, i  $\mathbf{F}$  és una matriu que es detallarà més endavant. Així mateix,  $\mathbf{V}_\varepsilon = \mathbf{0}$  atès que la sèrie  $\mathbf{s}_{IB}$  és considerada com a donada i les subsèries sectorials s'hi han de reconciliar. S'ha de verificar:

$$s_{IB,t} = \sum_{i=1}^{I-1} w_{i,t} \theta_{i,t}, \quad \text{per a } t = 1, \dots, T,$$

i  $\sum_{i=1}^{I-1} w_{i,t} = 1$  per a  $t = 1, \dots, T$ , on  $w_{i,t}$  és el pes del sector  $i$  en el moment  $t$ . En principi, els pesos s'obtenen de la comptabilitat regional i són constants dins l'any,  $w_{i,t} = w_{i,m}$ ,  $t \in m$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Més endavant veurem com relaxar aquest supòsit a fi que els canvis dins d'any estiguin suavitzats. Per tant, la matriu  $\mathbf{F}$  té la forma

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & & w_{I-1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{1,2} & \cdots & 0 & & 0 & w_{I-1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{1,T} & & 0 & 0 & \cdots & w_{I-1,T} \end{pmatrix}.$$

Els estimadors del model (34)-(35) venen donats per

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{s} + \mathbf{V}_e \mathbf{F}' \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{s}_{IB} - \mathbf{F}\mathbf{s}) \\ V(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_e \mathbf{F}' \mathbf{V}_d^{-1} \mathbf{F} \mathbf{V}_e \end{aligned}$$

on  $\mathbf{V}_d = \mathbf{F} \mathbf{V}_e \mathbf{F}' + \mathbf{V}_\varepsilon$ .

### 6.2.1 Desgregació temporal dels pesos i reconciliació d'aquests

Atès que dels pesos de ponderació es disposa, com a màxim, d'una sèrie anual, la qual, en ser considerada a un nivell de desagregació subanual, presenta bots en els canvis d'any, les pot procedir a obtenir una sèrie de pesos desagregats temporalment que consistiria en dues etapes:

1. Desagregació temporal de cada sèrie sectorial individual de pesos anuals  $w_{i,m}$ ,  $m = 1, \dots, M$ , emprant Chow-Lin (vegeu l'apèndix) o, equivalentment, el mètode d'ancorament additiu de Dagum-Cholette mostrat anteriorment. Sigui  $w_{i,t}^{(0)}$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $i = 1, \dots, I - 1$ , aquesta estimació preliminar.



2. Reconciliar aquestes sèries de pesos amb fi que sumin 1. És a dir, plantejar el model

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^{(0)} &= \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \\ \mathbf{1}_T &= \mathbf{F}_w \boldsymbol{\theta}\end{aligned}$$

on  $\mathbf{1}_h$  és un vector d'uns de dimensions  $h \times 1$ ,  $\mathbf{F}_w = \mathbf{1}'_{T-1} \otimes \mathbf{I}_T$ , que té com a estimador MQGR

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{V}'_e \mathbf{F}_w \mathbf{V}_d^{-1} (\mathbf{1}_T - \mathbf{F}_w \mathbf{w}^{(0)})$$

on  $\mathbf{V}_d = \mathbf{F}_w \mathbf{V}_e \mathbf{F}'_w$ .

Els nous pesos desagregats temporalment i reconciliats venen donats per  $\mathbf{w}^{(1)} \equiv \hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

### 6.3 Reconciliació d'indicadors territorials i ancorament

En principi només es disposa, com a dades de referència fiables per al VAB per Illes, les del Marc Input-Output de les Illes Balears 2004. Així mateix, la Direcció General d'Economia (2009) va elaborar unes sèries, per a ús intern, que cobreixen el període 1999-2006, vuit anys en total. A més, aquestes sèries estan desagregades sectorialment. Val a dir, en tot cas, que atesa la informació disponible amb que van ser estimades, aquestes sèries tenen una fiabilitat limitada, de manera que no es poden considerar en cam cas, com a constrenyents.

D'altra banda, es disposa d'un sistema d'indicadors sintètics del VAB territorial. Aquesta bateria d'indicadors s'ha de reconciliar amb l'agregat de referència. A més, es pot utilitzar com a ancorament, les sèries de la DGE (2009), amb restriccions no constrenyents ( $\mathbf{V}_\varepsilon > 0$ ). Aquestes sèries estan allunyades en el passat i cobreixen el període 1999-2006, de manera que no es disposa d'informació per ancorar-les en el present.

El model d'ancorament amb reconciliació parteix de les expressions (27)-(27) amb la matriu  $\mathbf{G}$  de reconciliació a una via (la territorial), que en la seva forma amb ponderacions és,  $\mathbf{G}_J = \mathbf{w}_J \otimes \mathbf{I}_T$  on  $\mathbf{w}_J = (w_1, \dots, w_{J-1}, -1)$ , i amb una sèrie de particularietats, entre les quals  $\mathbf{V}_a > 0$  excepte, tal volta, per l'any 2004,  $\mathbf{V}_g = 0$  i pesos de les restriccions que varien anualment.

El punt de partida és un sistema d'indicadors en forma de suma ponderada haurien de verificar la restricció d'agregació territorial

$$\theta_{J,t} = \sum_{j=1}^{J-1} w_{j,m} \theta_{j,t}, \quad \text{per a } t = 1, \dots, T,$$

on  $\sum_{j=1}^{J-1} w_{j,m} = 1$ ,  $\theta_{J,t}$  és l'agregat del VAB de les Illes Balears en el moment  $t$  any  $m$ , els pesos  $w_{j,m}$  són els de l'any  $m$  i van variant d'any en any, atès que

no tots els territoris (de)creixen amb la mateixa intensitat. Si les sèries  $s_{J,t}$  són índexos de volum, aleshores

$$a_{j,m} = \frac{1}{12} \sum_{t=t_{1m}}^{t_{12m}} \theta_{j,t} \quad \text{per a } m = 1, \dots, M \quad \text{i} \quad j = 1, \dots, J-1,$$

i

$$w_{j,m} = \frac{a_{j,m}}{a_{J,m}} \quad \text{per a } m = 1, \dots, M \quad \text{i} \quad j = 1, \dots, J-1,$$

però de les sèries  $a_{j,m}$  només es disposa d'informació per ancorar per a  $m = 1999, \dots, 2006$ , de manera que els pesos per a la resta d'anys s'ha d'estimar. La sèrie  $a_{J,m}$  sí que es considera fiable i definitiva, així com els pesos  $w_{j,m}$  per a  $m = 1999, \dots, 2006$ .

Sigui

$$q_{j,m} \equiv \frac{a_{j,m}}{a_{j,m-1}} - 1 \quad \text{per a } m = 2, \dots, M \quad \text{i} \quad j = 1, \dots, J$$

la taxa de variació anual de la magnitud  $a_{j,m}$ , de manera que

$$a_{j,m} = a_{j,m-1} (1 + q_{j,m}).$$

Per als anys  $m = 2007, \dots$  es disposa d'una estimació preliminar de  $\hat{q}_{j,m}$  amb la qual es calcula  $\hat{a}_{j,m}$  i  $\hat{w}_{j,m}$  i a partir d'aquests valors, la matriu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}} &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{G}}_1 & \hat{\mathbf{G}}_2 & \cdots & -\hat{\mathbf{G}}_J \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_{1,99} & 0 & \cdots & 0 & w_{2,99} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{1,00} & \cdots & 0 & 0 & w_{2,00} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{w}_{1,19} & 0 & 0 & \cdots & \hat{w}_{2,19} \\ & -w_{J,99} & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & -w_{J,00} & \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & -\hat{w}_{J,19} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Amb aquesta estimació preliminar de  $\hat{\mathbf{G}}$ , a partir de (30)-(33) s'estima  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  i  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Amb aquests valors es recalculen  $\hat{a}_{j,m} = \frac{1}{12} \sum_{t=t_{1m}}^{t_{12m}} \hat{\theta}_{j,t}$ ,  $\hat{w}_{j,m}$  per a  $m = 2007, \dots$  i  $\hat{\mathbf{G}}$  i s'itera de nou. Es continua fins que les variacions dels estimadors entre iteracions siguin mínimes.

## 6.4 Reconciliació d'indicadors sectorials i ancorament

El model és

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_a \end{aligned}$$

on  $\mathbf{g}$  és l'indicador de l'agregat,  $\mathbf{a}$  conté apiltats els valors anuals dels sectors. Alternativament,

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

o bé,

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \quad (36)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (37)$$

on  $\mathbf{f} = (\mathbf{g}', \mathbf{a}')'$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\varepsilon}'_a)'$  i

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}.$$

Com que  $\mathbf{F}$  és de rang columna deficient, estimam imposant  $V(\boldsymbol{\varepsilon}) > 0$ .

## 6.5 Reconciliació d'indicadors territorials, sectorials i ancorament

El model és

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{G}_{\text{sec}}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{sec}} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{G}_{\text{ter}}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ter}} \\ \mathbf{a}_{\text{sec}} &= \mathbf{J}_{\text{sec}}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_{a,\text{sec}} \\ \mathbf{a}_{\text{ter}} &= \mathbf{J}_{\text{ter}}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_{a,\text{ter}} \end{aligned}$$

on  $\mathbf{s} = (\mathbf{s}'_{\text{sec}}, \mathbf{s}'_{\text{ter}})'$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}'_{\text{sec}}, \boldsymbol{\theta}'_{\text{ter}})'$ ,  $\mathbf{g}$  és l'indicador agregat,  $\mathbf{a}_{\text{sec}}$  conté apiltats els valors anuals del agregats sectorials i  $\mathbf{a}_{\text{ter}}$  els territorials. Alternativament,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{\text{sec}} \\ \mathbf{s}_{\text{ter}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{\text{sec}} \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{ter}} \end{pmatrix} + \mathbf{e} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{a}_{\text{sec}} \\ \mathbf{a}_{\text{ter}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\text{sec}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{ter}} \\ \mathbf{J}_{\text{sec}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\text{ter}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{\text{sec}} \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{ter}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{sec}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ter}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{a,\text{sec}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{a,\text{ter}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

o bé,

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

on  $\mathbf{f} = (\mathbf{g}', \mathbf{g}', \mathbf{a}'_{\text{sec}}, \mathbf{a}'_{\text{ter}})'$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{sec}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{ter}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{a,\text{sec}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{a,\text{ter}})'$  i

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\text{sec}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{ter}} \\ \mathbf{J}_{\text{sec}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\text{ter}} \end{pmatrix}.$$

Com en el cas anterior, s'estima imposant  $V(\boldsymbol{\varepsilon}) > 0$ .

## 6.6 Reconciliació d'indicadors territorials, sectorials, VAB turístic i ancorament

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_{\text{sec}} \\ \mathbf{s}_{\text{ter}} \\ \mathbf{s}_{\text{tur}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{\text{sec}} \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{ter}} \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{tur}} \end{pmatrix} + \mathbf{e}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{a}_{\text{sec}} \\ \mathbf{a}_{\text{ter}} \\ \mathbf{a}_{\text{tur}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\text{sec}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{ter}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{tur}} \\ \mathbf{J}_{\text{sec}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\text{ter}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\text{tur}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{\text{sec}} \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{ter}} \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{tur}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{sec}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ter}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tur}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{a,\text{sec}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{a,\text{ter}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{a,\text{tur}} \end{pmatrix}$$

o bé,

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \\ \mathbf{f} &= \mathbf{F}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

on  $\mathbf{f} = (\mathbf{g}', \mathbf{g}', \mathbf{g}', \mathbf{a}'_{\text{sec}}, \mathbf{a}'_{\text{ter}}, \mathbf{a}'_{\text{tur}})'$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{sec}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{ter}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{tur}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{a,\text{sec}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{a,\text{ter}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{a,\text{tur}})'$  i

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\text{sec}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{ter}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{tur}} \\ \mathbf{J}_{\text{sec}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\text{ter}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\text{tur}} \end{pmatrix}.$$

Com en el cas anterior, s'estima imposant  $V(\boldsymbol{\varepsilon}) > 0$ .

## 7 Apèndix 3: Rutines implementades en R

S'han implementat en el llenguatge de programació i tractament estadístic R diverses rutines (funcions), que es mostren més a baix classificades segons el tipus de tasca (descomposició de Chow-Lin, ancorament, reconciliació, reconciliació amb ancorament). Així mateix, s'ha cregut convenient crear una classe d'objecte en R, la *classe BM*, i adaptar funcions pròpies de R a aquesta classe

(*plot*, *print*, *summary*, entre d'altres). Les funcions implementades també es mostren en el llistat. El codi de totes aquestes funcions es troba al fitxer `Benchmark_rutines_v3.R`, que s'adjunta amb aquest document.

Aquestes funcions han permès escriure diversos *scripts*, que també s'ajunen amb aquest document, que executen de manera automatitzada el càlcul dels indicadors sintètics, en presenten el resultat dels indicadors ancorats i reconciliats i permeten la visualització gràfica d'aquests. Així, els fitxers `Benchmark_proves_v3.R` (dades trimestrals) i `Benchmark_proves_v4.R` (dades mensuals) llegeixen les dades i apliquen les rutines per tal d'obtenir estimacions dels indicadors ancorats i reconciliats i mostrar-ne els principals resultats i gràfics.

Les rutines de reconciliació i ancorament depenen de 2 (vectors de) paràmetres que per defecte prenen valors prefixats, ja sigui a suggeriment de Dagum i Cholette (2006) o bé, en un procés heurístic, s'ha fixat en uns valors que proporcionen resultats coherents. Aquest paràmetres estan relacionats amb l'estructura de dues matrius de variàncies i covariàncies dels termes de pertorbació. Per exemple, en el model donat per les expressions (36) i (37) hi apareixen els termes d'error  $\mathbf{e}$ , associat a (36) i  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (37).

Pel que fa al primer terme,  $\mathbf{e}$ , el qual recull la discrepància entre els indicadors observats-estimats (primera etapa) amb els que sorgiran de l'ancorament i reconciliació ( $\boldsymbol{\theta}$ ), com és habitual en la literatura (vegeu Dagum i Cholette, 2006 p. 93), s'imposa una estructura autorregressiva de primer o segon ordre a fi de que els canvis període a període de l'estimador siguin relativament suaus. Així suggereixen el valor del paràmetre AR(1) que estigui a l'interval  $0.7 \leq \varphi \leq 0.90$  per a sèries mensuals i de  $0.7^3 \leq \varphi \leq 0.90^3$  per a dades trimestrals. El valor  $\varphi = 0.9$  sol donar bons resultats. Per al model AR(2) suggereixen  $(1 - \varphi L)(1 - \varphi^2 L)$  amb valors de  $\varphi$  com els del model AR(1).

Quant al segon terme,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , que recull la discrepància entre les xifres dels agregats (territorials, sectorials i anuals),  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{sec}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{\text{ter}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{a,\text{sec}}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{a,\text{ter}})'$ , s'imposa, com és pràctica comuna, que la seva matriu de variàncies i covariàncies és diagonal per blocs, i les variàncies de cadascun dels quadre termes d' $\boldsymbol{\varepsilon}$ , pot prendre valors diferents.<sup>12</sup> Si per algun terme de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  la seva variància fos nul·la aleshores, la restricció implicada és constrenyent.<sup>13</sup>

A les rutines implementades, els paràmetres estan inicialitzats per defecte a:

- Ordre del AR: 2
- Paràmetre del AR: 0.9
- $V_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{diag}(0.4, 0.5, 0.01, 0.01)$ ; els valors propers a zero de  $V_{\boldsymbol{\varepsilon}_{a,\text{sec}}} = V_{\boldsymbol{\varepsilon}_{a,\text{ter}}} = 0.01$  impliquen que les estimacions obtingudes dels indicadors agregades temporalment (gairebé) coincidiran amb els resultats anuals de referència.

<sup>12</sup>Val a dir que la magnitud de les variàncies s'ha d'interpretar en termes de la variància d' $\mathbf{e}$ .

<sup>13</sup>Les rutines estan programades sota el supòsit que no hi ha restriccions constrenyents i que cap d'aquestes 4 variàncies és nul·la. En tal cas, alguna de les matrius emprades en els càlcul dels estimadors ancorats i reconciliats seria singular i les rutines donarien error. No obstant, una restricció gairebé constrenyent es pot aconseguir fixant aquestes variàncies en valors propers a zero (p.e.  $V_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{sec}}} = 0.01$ ).

Atès que els valors dels 6 paràmetres es pot considerar fins a cert punt arbitrari, s'han dissenyat dues rutines, `afina.recon.sectorial.ancorada(inputs, param, valors, r)` i `afina.reconciliacio.total(inputs, param, valors, r)`, que permeten el calibratge dels paràmetres a fi d'obtenir un ajust més satisfactori.

## 7.1 Llistat de funcions

### 1. Funcions generals

- `crea.matriu_V_e (T,ordreAR=2,paramAR=0.9,S=12)`
- `taula.betas (beta,V_beta)`
- `intervals.theta(theta,V_theta,nivell_conf=0.95)`
- `taxa(x,r=1)`
- `apila(x)`
- `desapila (theta,t,n_sectors)`
- `esten.anual(x,S)`
- `agrega.temp(suba,J)`

### 2. Chow-Lin

- `chow.lin(y,indicadors=1,S=12,V,tipus="mean")`
- `plot.chow.lin(y,yd)`

### 3. Ancorament

- `crea.matriu_J(N_freq_baixa,S,tipus="mean")`
- `ancorament.additiu(a,suba,R,J,V_e,V_ep=0,nom=" ",S)`

### 4. Classe BM

- `crea.BMs(agregades,subseries,theta,V_theta,noms,sr,pesos,tipus,S)`
- `plot.BM(x,titol,posar.llegenda=TRUE,...)`
- `plot.BMs(x,titols,...)`
- `print.BM(x,...)`
- `converteix.BM.df (x)`
- `exporta.BM (x,f,dec = ",")`
- `taxes.BM (x,r)`
- `taxes.BMs(x,r)`
- `taxes.ref.BMs(x,sra,r,S,ordreAR=2,paramAR=0.9)`
- `taxes.agreg.BMs(x,sra,r,S,ordreAR=2,paramAR=0.9)`

- `SQR.taxes.agreg.BMs(x)`
- `plot.taxes.BMs(x,titol="taxes de variació agregades")`
- `summary.BM(x,S)`
- `summary.BMs(x,sra,S)`

#### 5. Reconciliació

- `reconcilia (agreg,subs,G,V_e,V_ep=0)`
- `reconciliacio.sectorial(IS.tot,IS.sec,IV.sec,w.sec, S, noms = c("Agricultura", "Industria", "Construcció", "Serveis"), v.ep=0, ordreAR=2, paramAR=0.9)`
- `reconciliacio.sectorial.ancorada (IS.tot,IS.sec,IV.sec,w.sec, S, noms = c("Agricultura", "Industria", "Construcció", "Serveis"), v.ep=c(0.4,0.01), ordreAR=2, paramAR=0.9)`
- `afina.recon.sectorial.ancorada (inputs,param,valors,r)`
- `crea.matriu.G_pesos (matriuPesos)`
- `crea.matriu.G.tipus(matriuPesos,tipus="mean")`

#### 6. Reconciliació sectorial i territorial amb ancorament

- `reconciliacio.total (IS.tot,IS.sec,IS.terr,IV.sec,IV.terr, w.sec,w.terr, S, noms = c("Agricultura", "Industria", "Construcció", "Serveis", "Mallorca", "Menorca", "Pitiuses"), v.ep=c(0.4,0.5,0.01,0.01), ordreAR=2, paramAR=0.9)`
- `afina.reconciliacio.total (inputs,param,valors,r)`
- `crea.matrius.G_i_V_ep (w.sec,w.terr,S,v.ep,T.s)`

## 8 Bibliografia

### References

- [1] AETIB i IBESTAT (2020): Conselleria de Model Econòmic, Turisme i Treball. Govern de les Illes Balears. "Cuenta Satélite del Turismo de las Illes Balears 2014". Palma.
- [2] Bacharach M (1965): Estimating nonnegative matrices from marginal data. *International Economic Review* 6:294-310.
- [3] Bacharach M (1971): *Biproportional matrices and input-output change*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] Caporello G. y A. Maravall (2004) Program TSW. Revised manual. Documentos Ocasionales, Banco de España nº 0408.

- [5] Chow GC & Lin AL (1971) Best linear unbiased interpolation, distribution and extrapolation of time series by related series. *The Review of Economics and Statistics* 53:372-375.
- [6] Chun H. and S. Keles (2010) Sparse partial least squares for simultaneous dimension reduction and variable selection, *Journal of the Royal Statistical Society Series B* (Statistical Methodology) 72, 3-25.
- [7] Dagum, E.B. & P.A. Cholette (2006): *Benchmarking, Temporal Distribution, and Reconciliation Methods for Time Series*. Springer.
- [8] Dagum, E.B., P.A. Cholette & Z.G. Chen (1998): A Unified View of Signal Extraction, Benchmarking, Interpolation and Extrapolation of Time Series. *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*, Vol. 66, No. 3 (Dec., 1998), pp. 245-269.
- [9] Del Barrio, T. & J. Mateu (2010): Un sistema de indicadores sintéticos de actividad sectorial y por islas. Document intern. Direcció General d'Economia. Conselleria d'Economia i Hisenda. Govern Balear.
- [10] Direcció General d'Economia (2009): Compabilitat Regional per Illes. Document intern. Conselleria d'Economia i Hisenda. Govern de les Illes Balears.
- [11] Direcció General d'Economia (2010): Comptes Satèl·lit del Turisme 2004. Document intern. Conselleria d'Economia i Hisenda. Govern de les Illes Balears.
- [12] Fernández F. (1991) Indicadores sintéticos de aceleración y desaceleración en la actividad económica. *Revista Española de Economía*. 8, 135-156.
- [13] Findley D. F., B. C. Monsell, W. R. Bell, M. C. Otto and B.C. Chen (1996) New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program. *Journal of Business and Economic Statistics*, 16, 127-157.
- [14] Forni M., M. Hallin, M. Lippi y L. Reichlin (2001) Coincident and leading indicators for the EURO area. *Economic Journal*, 111, 62-85.
- [15] Gomez V. y P. Bengoechea (1998) El Filtro de Ciclo-Tendencia Utilizado en la Contabilidad Nacional Trimestral frente a los Filtros basados en modelos. Documentos de Trabajo de la Dirección General de Análisis y Programación Presupuestaria, nº D-98004.
- [16] Gomez V. y A. Maravall (1996) Programs TRAMO (Time series regresión with ARIMA noise, missing observations and outliers) and SEATS (Signal extraction in ARIMA time series). WP 9628. Banco de España.
- [17] Govern de les Illes Balears (2007): Marc Input-Output de les Illes Balears 2004 i de Mallorca, Menorca i Eivissa-Formentera.



- [18] Groen J.J. and G. Kapetanios (2016) Revisiting useful approaches to data-rich macroeconomic forecasting. *Computational Statistics & Data Analysis*, 100, 221-239.
- [19] Green G.B. y B.A. Beckman (1992) The composite index of coincident indicators and alternative coincident indexes. *Surveys in Current Business*, 72, 42-45.
- [20] Helland I.S.(1990) Partial least squares regression and statistical models, *Scandinavian Journal of Statistics*, 17, 97-114.
- [21] Ibestat (2020): Marc Input-Output de les Illes Balears 2014.
- [22] Melis, F. (1991) La estimación del ritmo de variación en series económicas, *Estadística Española*, 126, 7-56.
- [23] Niemira M.P. y P.A. Klein (1994) *Forecasting Financial and Economic Cycle*. John Wiley and Sons, New York.
- [24] Solomou S & M. Weale (1993): Balanced estimates of national accounts when measurement errors are autocorrelated: the UK, 1920-38. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 156:89-105.
- [25] Stock J.H. y M.W. Watson (1990) *New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators*. NBER Reprints 1380
- [26] Weale M (1988): The reconciliation of values, volumes and prices in the national accounts. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 151:211-221.